Diplomarbeit

Theorie und Algorithmen zur q-hypergeometrischen Summation

Harald Böing

Betreuer: Prof. Dr. Wolfram Koepf

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

Januar 1998

Die Schule von Freud und Leid durchlaufen
Und darin bis zum Äußersten gehen –
Erst das schafft Glück, das von Dauer ist.
Das Denken über Zweifel und Glauben hinaustreiben
Und darin bis zum Äußersten gehen –
Erst das schafft Erkenntnis der Wahrheit.

Hung Ying-ming

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mir bei der Erstellung dieser Diplomarbeit geholfen haben. Mein ganz besonderer Dank gilt dabei Prof. Dr. Wolfram Koepf, der nicht nur unermüdlich meine MAPLE-Implementierungen testete und viele Verbesserungsvorschläge machte, sondern mich insbesondere auch an seinen wissenschaftlichen Forschungsarbeiten teilhaben ließ und mir so einen interessanten Einblick in dieses Gebiet gab. Ermöglicht wurde dies auch durch das Konrad Zuse Institut, an dem ich zweieinhalb Jahre als studentische Hilfskraft unter der Obhut von Wolfram Koepf in der Abteilung Symbolik arbeitete. Die entspannte und kreative Arbeitsatmosphäre wird mir in guter Erinnerung bleiben.

Ich möchte auch Winfried Neun danken, der sich immer die Zeit nahm, meine diversen Computerprobleme souverän und gelassen zu beheben. Für das Korrekturlesen bzgl. der Rechtschreibung dieser Arbeit bedanke ich mich bei meiner Mutter.

Von den vielen anderen Leuten möchte ich an dieser Stelle noch exemplarisch die Bad Manners und Mother's Pride erwähnen, die in Stunden der Not eine unerschöpfliche Quelle guter Laune für mich waren. Bedanken möchte ich mich auch bei Karola und Sabine, die als Leiterinnen der wöchentlichen Meditationsübungen wesentlich zu meinem Wohlbefinden sowie einer tiefen inneren Entspannung beitrugen. Nicht zuletzt gebührt mein Dank Frau Thiede vom Prüfungsbüro, die während meines gesamten Studiums mit unermüdlicher Freundlichkeit alle auftretenden Probleme löste.

Berlin-Friedenau, Januar 1998 Harald Böing

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis aller Algorithmen

1 Einleitung

In vielen Gebieten der Mathematik werden wir mit dem Problem konfrontiert, Summen auszuwerten oder Identitäten zu beweisen, die Summen enthalten. Eines der bekanntesten Beispiele ist wohl die Summe $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wobei $a_0 = 1$ und $r = a_{k+1}/a_k \in \mathbb{C}$ konstant ist; dies entspricht der geometrische Reihe, für die $S = 1/(1-r)$ gilt, falls $|r| < 1$ ist. Eine Verallgemeinerung der geometrischen Reihe erhält man durch Betrachtung von Summanden a_k mit $r = a_{k+1}/a_k \in \mathbb{C}[k]$ und $a_0 = 1$: Solche Reihen nennt man *hypergeometrische Funktionen*. Für diese existieren diverse Algorithmen, mit denen man effizient die obengenannten Probleme angehen kann.

In den letzten hundert Jahren tauchten jedoch in so verschiedenen Gebieten wie Lie Algebren, statistische Mechanik, Zahlentheorie und Computeralgebra zunehmend Reihen auf, für die $r = a_{k+1}/a_k \in \mathbb{F}(q^k)$ gilt; hierbei ist q ist eine symbolische Variable, $\mathbb{F} = \mathbb{K}(q)$ und $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0. Dementsprechend nennt man diese Reihen q-hypergeometrische Reihen[1], falls $a_0 = 1$ und $a_{k+1}/a_k \in \mathbb{F}(q^k)$ gilt; den Term a_k nennt man q-hypergeometrisch bzgl. k.

In meiner Arbeit möchte ich im wesentlichen drei Algorithmen vorstellen, den q-Gosper-, den q-Zeilberger- und den q-Petkovšek-Algorithmus. Alle drei sind nützlich zur Manipulation von Summen q-hypergeometrischer Terme.

1.1 q-Gosper-Algorithmus

Aus der Analysis wissen wir dank des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, daß die bestimmte Integration einer Funktion $f(x)$ trivial ist, sofern wir eine Stammfunktion von $f(x)$ kennen. Im diskreten Fall wird die Berechnung der Summe $\sum_{k=l}^{h} F(k)$ einfach, sobald wir eine Funktion $G(k)$, mit

$$F(k) = G(k+1) - G(k) \tag{1.1}$$

kennen:

$$\sum_{k=l}^{h} F(k) \;=\; \sum_{k=l}^{h} \big(G(k+1) - G(k)\big) \;=\; G(h+1) - G(l). \tag{1.2}$$

Aufgrund dieser Analogie nennt man $G(k)$ eine *diskrete Stammfunktion* von $F(k)$. Um eine solche im kontinuierlichen bzw. diskreten Fall zu bestimmen, gehen wir gewöhnlicherweise – mit einer Handvoll Regeln ausgerüstet[2] – heuristisch vor. In beiden Fällen ist jedoch für eine jeweils große Funktionenklasse eine *algorithmische* Bestimmung möglich: Im kontinuierlichen Fall ist es der Risch-Algorithmus (siehe [GCL92]) und im diskreten der Gosper- bzw. q-Gosper-Algorithmus (siehe z. B. [Gos78], [GKP94], [Koe98], [Koo93], [PWZ96], [WZ92]).

In dieser Arbeit beschreibe ich eine Erweiterung des q-Gosper-Algorithmus, die für einen $\mathbf{q}$-hypergeometrischen Term $F(k)$, d. h.

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} \in \mathbb{K}(q_1, \ldots, q_m)\big({q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\big), \quad \text{mit } \mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m), m \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

[1]In der englischsprachigen Literatur heißen sie *basic hypergeometric series* (siehe auch [And86] für ein interessante historische sowie theoretische Einführung).

[2]Z. B. partielle Integration (Summation), Integration durch Substitution usw.

eine **q**-hypergeometrische Stammfunktion ermittelt. Der Fall $m = 1$ wird in [Koo93], [PWZ96] und [WZ92]) beschrieben, wohingegen A. Riese in [Rie96] $m = 2$ betrachtet. Ein wesentlicher Aspekt wird dabei eine saubere algorithmische Beschreibung in Pseudocode sein, da erst die Implementierung des Algorithmus in einem Computeralgebrasystem die oft sehr aufwendigen Rechnungen ermöglicht.

R. W. Gosper Jr. veröffentlichte zwar bereits 1978 seinen Algorithmus zur Bestimmung von *hypergeometrischen* Stammfunktionen, aber erst 1995 sorgte P. Paule für eine theoretische *Herleitung* des Algorithmus mit Hilfe seines „Greatest Factorial Factorization"-Konzepts („GFF" siehe [Pau95] bzw. für den q-Fall die „qGFF"-Variante in [PR95]). Da dieses Konzept sehr zur „Entmystifizierung" des Gosper-Algorithmus beiträgt, wollen wir es in Kapitel 4 nachvollziehen. Vorher wollen wir jedoch in Paragraph 3 im wesentlichen Gospers Ansatz folgen, da dieser leicht nachzuvollziehen ist.

Die Mächtigkeit des Gosper-Algorithmus beruht auf der Tatsache, daß dieser ein *Entscheidungs-Algorithmus* ist: Liefert der Algorithmus keine hypergeometrische Stammfunktion, so existiert auch keine solche. Mit Hilfe des Gosper-Algorithmus kann man jedoch nicht nur entscheiden, ob eine hypergeometrische Stammfunktion existiert, sondern auch, ob es eine *endliche Linearkombination hypergeometrischer Terme* gibt, die eine Stammfunktion bilden. In [PWZ96] zeigen dies die Autoren für den hypergeometrischen Fall, was wir in Kapitel 5 wieder auf den **q**-Fall übertragen wollen.

1.2 q-Zeilberger-Algorithmus

Zeilbergers Paradigma lautet: Um Gleichungen der Form $A = B$ zu beweisen, überprüfe man, ob beide Seiten die gleiche Rekursionsgleichung erfüllen (siehe [GKP94], [Koe98], [Koo93], [PWZ96], [WZ92]). Dementsprechend versucht der q-Zeilberger-Algorithmus, Rekursionsgleichungen für definite Summen q-hypergeometrischer Terme durch eine geschickte Anwendung des q-Gosper-Algorithmus zu ermitteln: Ist der q-hypergeometrische Term $F(n,k)$ bzgl. n und k gegeben, so sucht man zunächst folgende inhomogenene Rekursionsgleichung für $F(n,k)$,

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j,k) \;=\; G(n,k+1) - G(n,k), \tag{1.4}$$

$\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big)$ und $G(n,k)/F(n,k) \in \mathbb{F}\big(q^n, q^k\big)$. Durch Summation von Gleichung (1.4) über k erhalten wir dann eine Rekursion für die definite Summe $S(n) = \sum_{k=l_n}^{h_n} F(n,k)$:[3]

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, S(n-j) \;=\; B(n), \tag{1.5}$$

wobei $B(n)$ q-hypergeometrisch bzgl. n ist. Im Gegensatz zu vielen anderen Algorithmen liefert der q-Zeilberger-Algorithmus gleich eine Methode zur Verifikation der Gültigkeit von (1.5): Angenommen, man gibt uns Rekursion (1.5) *und* $G(n,k)$, so können wir die Gültigkeit der Rekursion in zwei Schritten überprüfen.[4]

[3] Oft ist z. B. $F(n,k)$ nur auf einem kompakten Intervall ungleich Null, so daß wir über $k \in \mathbb{Z}$ summieren. Ansonsten könnte man hier von l_n bis h_n summieren und anschließend alle Terme auf der linken Seite, die nicht zu $S(n), \ldots, S(n-J)$ gehören, auf die rechte Seite bringen. Für eine ausführlichere Diskussion sei auf Kapitel 6 verwiesen.

[4] Insbesondere T. H. Koornwinder gibt in [Koo93] eine präzise Beschreibung, unter welchen Bedingungen die Rekursionsgleichung (1.5) gültig ist.

1. Zunächst schreiben wir Gleichung (1.4) auf, teilen durch $F(n,k)$ und erhalten so eine in q^k und q^n rationale Identität, die leicht zu verifizieren ist.

2. Gilt (1.4), so brauchen wir nur noch über einen entsprechenden Summationsbereich von k zu summieren, um Gleichung (1.5) zu erhalten.

Prinzipiell ist somit eine Verifikation der Rekursion für die Summe möglich, wobei fairerweise anzumerken ist, daß dies bei komplizierten $F(n,k)$ und $G(n,k)$ bereits sehr aufwendig sein kann. Der Vorteil ist jedoch, daß diese Verifikation auf *rationaler Arithmetik* basiert und der Nachweis insofern schlimmstenfalls langwierig, aber vom Prinzip her nicht kompliziert ist.

1.3 q-Petkovšek-Algorithmus

Leider ist die Rekursion (1.5), die der q-Zeilberger-Algorithmus liefert, nicht immer von minimaler Ordnung. Oft ist man jedoch an der Beantwortung der Frage interessiert, ob es für die gegebene Summe $S(n)$ einen äquivalenten q-hypergeometrischen Ausdruck gibt.

Um nun alle hypergeometrischen Lösungen einer Rekursionsgleichung mit polynomialen Koeffizienten zu bestimmen, gibt es den Petkovšek-Algorithmus (siehe [Koe98], [PWZ96]). Dieser läßt sich wieder auf den q-Fall übertragen (siehe [Abr95], [APP98]). Im q-Fall gibt es allerdings die Möglichkeit, auch Lösungen der Form $\sum_{j=l}^{\infty} a_j \left(q^k\right)^j$, wobei a_j q-hypergeometrisch bzgl. j ist, zu bestimmen. Diese Variante möchte ich nutzen, um eine kleine Erweiterung des q-Gosper-Algorithmus' vorzustellen. Auch bei diesem Algorithmus werde ich wieder betrachten, was beim Übergang vom eindimensionalen Fall q auf den mehrdimensionalen mit $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ passiert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Notation

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ und setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ferner sei von nun an $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, wobei $\mathbf{q}$ ab Abschnitt 3 stets als Vektor der *symbolischen* Parameter $q_1, \dots, q_m$ aufzufassen ist. Für Potenzen benutzen wir die Abkürzungen:

$$\mathbf{q}^{\mathbf{n}} = {q_1}^{n_1} {q_2}^{n_2} \cdots {q_m}^{n_m}, \ \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}^l = {q_1}^l {q_2}^l \cdots {q_m}^l.$$

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ stets einen der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, erweitert um einige Parameter; $\mathbb{F}$ sei eine Abkürzung für den Körper $\mathbb{K}(q_1, q_2, \dots, q_m)$.[5] Den Ring aller Polynome in $x_1, \dots, x_m$ über $\mathbb{K}$ bezeichnen wir wie üblich mit $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$. Da wir jedoch oft mit multivariaten endlichen Laurentpolynomen $P(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \dots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$ arbeiten, möchte ich hierfür die Standarddefinition einer *Monomordnung* auf diesen Bereich erweitern.

Definition 2.1 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\prec$ eine Relation auf $\mathbb{K}[x_1, {x_1}^{-1}, \dots, x_m, {x_m}^{-1}]$. Dann heißt $\prec$ eine Monomordnung, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *$\prec$ ist eine totale Ordnung auf $\mathbb{K}[x_1, {x_1}^{-1}, \dots, x_m, {x_m}^{-1}]$*

(ii) *$\prec$ ist eine Wohlordnung auf $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_m]$*

(iii) *Für $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{Z}^m$ gilt:* $\quad \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \prec \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x}^{\gamma} \prec \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{x}^{\gamma}.$

Für die weitere Theorie sind dabei vor allen Dingen die Eigenschaften (i) und (iii) wichtig.[6] Ist[7]

$$P(k) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^m} p_{\boldsymbol{\alpha}} \, \mathbf{q}^{\alpha} \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \dots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right] \setminus \{0\}$$

und $\prec$ eine Monomordnung auf $\mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \dots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$, so bezeichne mit[8]

$$\operatorname{multildeg}(P(k)) = \min\left\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^m \;\middle|\; p_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\right\}$$

und

$$\operatorname{multideg}(P(k)) = \max\left\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^m \;\middle|\; p_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\right\}$$

den *unteren Multigrad* bzw. den *Multigrad* von $P(k)$. Dementsprechend verwenden wir die Schreibweise ldeg und deg für den unteren bzw. oberen Grad im univariaten Fall, wobei wir z. B. teilweise $\deg_x$ schreiben, um in mehrdeutigen Fällen klar zu machen, daß der Grad bzgl.

[5] Meist wollen wir uns unter $\mathbb{K}$ jedoch den Körper $\mathbb{Q}$ erweitert um einige Parameter vorstellen, da dies den Möglichkeiten eines Computeralgebrasystems entspricht (bzw. die meisten im System implementierten Algorithmen nur über diesem Körper arbeiten).

[6] Bedingung (ii) wurde im wesentlichen aufgenommen, um die hier vorgestellte Definition einer Monomordnung auf $\mathbb{K}[x_1, {x_1}^{-1}, \dots, x_m, {x_m}^{-1}]$ als Erweiterung der Standarddefinition einer Monomordnung auf $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ auffassen zu können.

[7] Im folgenden werden wir häufig Polynome durch unendliche Summen darstellen, wobei allerdings immer nur *endlich* viele Summanden ungleich Null sind.

[8] Beachte, daß das folgende Minimum bzw. Maximum über Vektoren aus $\mathbb{Z}^m$ gebildet werden muß, wofür wir die Monomordnung $\prec$ verwenden. Dies ist möglich, da $\prec$ auch eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^m$ induziert.

der Variablen x gebildet werden soll. Ferner verwenden wir die Abkürzung $\operatorname{coeff}(P(k), \mathbf{q}^{\boldsymbol{\alpha}})$ für den Koeffizienten $p_{\boldsymbol{\alpha}}$, sowie

$$\operatorname{tcoeff}(P(k)) = p_{\operatorname{multildeg}(P(k))} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{lcoeff}(P(k)) = p_{\operatorname{multideg}(P(k))}$$

für den *untersten* bzw. *obersten* Koeffizienten oder *Leitkoeffizienten* von $P(k)$; $P(k)$ heißt *monisch*, falls der Leitkoeffizient von $P(k)$ gleich 1 ist. Den *größten gemeinsamen Teiler* zweier Polynome bezeichnen wir stets mit gcd. Ferner setze für $F(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\right]$

$$G(k) := F(k) \quad (\mathbf{q}\text{-mod } {q_1}^k, \ldots, {q_m}^k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(k) := \left(\mathbf{q}^k\right)^{-\operatorname{multildeg}(F(k))} F(k).$$

2.2 q-Binomialsatz

Eine der bekanntesten Summationsformeln ist sicherlich die für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad \text{wobei } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1. \tag{2.1}$$

Eine allgemeinere Variante ist der *Binomialsatz*, den wir mit dem *Pochhammer-Symbol* $(a)_k$,

$$(a)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (a+j), \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

in folgender Form schreiben können:[9]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k = (1-z)^{-a}, \qquad \text{wobei } |z| < 1. \tag{2.2}$$

Ist $n = -a$ eine negative ganze Zahl und $z = -x/y$, wird der Name *Binomialsatz* verständlich:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

Nach der Regel von de l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{q \to 1} \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1}) \cdots (1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} = \frac{(a)_n}{n!},$$

so daß sich die Frage stellt, was passiert, wenn wir den Koeffizienten von z^k in (2.2) durch $(a;q)_k/(q;q)_k$ ersetzen, wobei

$$(a;q)_k := \begin{cases} \left(1-a\right)\left(1-a\,q\right)\cdots\left(1-a\,q^{k-1}\right), & \text{falls } k > 0, \\ 1, & \text{falls } k = 0, \\ \dfrac{1}{\left(1-a\,q^{-1}\right)\left(1-a\,q^{-2}\right)\cdots\left(1-a\,q^{k}\right)}, & \text{falls } k < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

[9] Beweis des Binomialsatzes z. B. mit Hilfe des Satzes von Taylor über Entwicklung der Funktion $(1-z)^{-a}$.

Der Ausdruck $(a;q)_k$ wird auch *q-Pochhammer-Symbol* genannt. Die Definition von $(a;q)_{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$ wurde so gewählt, daß für den Quotienten $(a;q)_{k+1}/(a;q)_k$ die allgemeine Formel

$$\frac{(a;q)_{k+1}}{(a;q)_k} = 1 - a\,q^k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

gilt. Zudem läßt sich die Definition von $(a;q)_k$ mit Hilfe des *q-Atoms* $(a;q)_\infty$

$$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - a\,q^j\right), \qquad |q| < 1, \tag{2.5}$$

auf komplexwertige k erweitern:

$$(a;q)_k = \frac{(a;q)_\infty}{(a\,q^k;q)_\infty}, \qquad a,q,k \in \mathbb{C},\ |q| < 1. \tag{2.6}$$

Bevor wir eine q-Variante des Binomialsatzes angeben, wollen wir zunächst einmal ein paar einfache Transformationsformeln für die q-Pochhammer-Symbole herleiten, die uns später die Arbeit erleichtern werden.

Lemma 2.2 *Sei q eine symbolische Variable. Setze $\{q\}_l^h = \left\{q^j \mid j \in \mathbb{Z}, l \le j \le h\right\}$, so gelten für $k,n \in \mathbb{Z}$ folgende Transformationsformeln:*[10]

$$\left(a;q^{-1}\right)_k = (-1)^k\,a^k\,q^{-\binom{k}{2}}\left(a^{-1};q\right)_k, \qquad a \notin \{q\}_k^1, \tag{2.7}$$

$$(a;q)_{-k} = \frac{1}{(a\,q^{-k};q)_k} = (-1)^k\,q^{\binom{k}{2}}\,\frac{(q/a)^k}{(q/a;q)_k}, \qquad a \notin \{q\}_1^k, \tag{2.8}$$

$$\left(a\,q^{-k};q\right)_k = (-1)^k\,(a/q)^k\,q^{-\binom{k}{2}}\,(q/a;q)_k, \qquad a \notin \{q\}_{1+k}^0, \tag{2.9}$$

$$\left(q^{-n};q\right)_n = (-1)^n\,q^{-n\,(n+1)/2}\,(q;q)_n, \qquad n \ge 0, \tag{2.10}$$

$$(a;q)_{n+k} = (a;q)_n\,(a\,q^n;q)_k, \qquad a \notin \{q\}_{\min\{1,1-n\}}^{\max\{-n,-k-n\}}, \tag{2.11}$$

$$(a;q)_{n-k} = (-1)^k\,q^{\binom{k}{2}}\,(q^{1-n}/a)^k\,\frac{(a;q)_n}{(q^{1-n}/a;q)_k}, \qquad a \notin \{q\}_{\min\{1,1-n\}}^{\max\{-n,k-n\}}, \tag{2.12}$$

$$\left(q^{-n};q\right)_k = (-1)^k\,q^{\binom{k}{2}}\,q^{-n\,k}\,\frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}, \qquad 1 \notin \{q\}_{\min\{k-n,n+1\}}^{\max\{0,-n-1\}}, \tag{2.13}$$

$$\frac{(q^{-n};q)_{n-k}}{(q;q)_{n-k}} = (-1)^k\,q^{-n\,(n+1)/2}\,q^{(n+1)\,k}\,\frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k}, \qquad 1 \notin \{q\}_{1+n}^{n-k}, \tag{2.14}$$

$$(a\,q^n;q)_k = \frac{(a;q)_k\,\left(a\,q^k;q\right)_n}{(a;q)_n}, \qquad a \notin \{q\}_{\min\{0,1-k\}}^{\max\{-k,n-1,-k-n\}}, \tag{2.15}$$

$$\left(a\,q^{k\,n};q\right)_n = \frac{(a;q)_{(k+1)\,n}}{(a;q)_{k\,n}}, \qquad a \notin \{q\}_{\min\{1,1-k\,n\}}^{\max\{0,-(k+1)\,n\}}, \tag{2.16}$$

$$(a;q)_{k\,n} = \left(a, a\,q, \ldots, a\,q^{n-1}; q^k\right)_k, \qquad n \in \mathbb{N}, a \notin \{q\}_1^{-k\,n}, \tag{2.17}$$

$$\left(a^2;q^2\right)_k = (a;q)_k\,(-a;q)_k, \qquad a \notin \{q\}_1^{-k}. \tag{2.18}$$

[10]Beachte, daß $\{q\}_l^h = \emptyset$, für $h < l$.

Beweis: Da $(a;q)_k$ für $k < 0$ bzw. $k \geq 0$ verschieden definiert ist, wollen wir – soweit möglich – stets Gleichung (2.6) anwenden, um uns aufwendige Fallunterscheidungen zu ersparen. Oft basiert jedoch ein einfacher Beweis aus einer Umsortierung eines *endlichen* Produktes, so daß wir in diesen Fällen nicht auf die q-Atome zurückgreifen wollen. So folgt für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\prod_{j=1}^{n} q^j \;=\; q^{(n+1)\,n/2} \;=\; q^{-n\,(-n-1)/2} \;=\; q^{\binom{-n}{2}} \tag{2.19}$$

Gleichung (2.7):

$$\begin{aligned}\left(a;q^{-1}\right)_n &= \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-a\,q^{-j}\right) = \prod_{j=0}^{n-1}\Big[\left(-a\,q^{-j}\right)\left(1-q^j/a\right)\Big] = (-1)^n\,a^n\,q^{-\binom{n}{2}}\left(a^{-1};q\right)_n,\\ \left(a;q^{-1}\right)_{-n} &= \prod_{j=1}^{n}\Big[\left(-a\,q^j\right)\left(1-q^{-j}/a\right)\Big]^{-1} \overset{(2.19)}{=} (-1)^{-n}\,a^{-n}\,q^{-\binom{-n}{2}}\left(a^{-1};q\right)_{-n}.\end{aligned}$$

Ist $k \in \mathbb{Z}$, so folgt Gleichung (2.8) aus

$$\frac{1}{(a\,q^{-k};q)_k} = \left(\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-a\,q^{-k+j}}{1-a\,q^{-k+k+j}}\right)^{-1} = \prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-a\,q^j}{1-a\,q^{-k+j}} = (a;q)_{-k}.$$

Für $k=0$ ist Gleichung (2.9) trivialerweise erfüllt, so daß wir nun die beiden Fälle $k=n$ und $k=-n$, $n \in \mathbb{N}$ betrachten wollen:

$$\begin{aligned}\left(a\,q^{-n};q\right)_n &= \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-q^{n-j}/a\right)\left(-a\,q^{j-n}\right) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-q^{1+j}/a\right)\left(-a\,q^{-j-1}\right)\\ &= (-a/n)^n\,q^{-\binom{n}{2}}\,(q/a;q)_n,\\ (a\,q^n;q)_{-n} &= \prod_{j=1}^{n}\Big[\left(1-q^{j-n}/a\right)\left(-a\,q^{n-j}\right)\Big]^{-1} = \prod_{j=1}^{n}\Big[\left(1-q^{1-j}/a\right)\left(-a\,q^{j-1}\right)\Big]^{-1}\\ &\overset{(2.19)}{=} (-a/q)^{-n}\,q^{-\binom{-n}{2}}\,(q/a;q)_{-n}.\end{aligned}$$

Gleichung (2.10) ist ein Spezialfall von (2.9) mit $a=1$. Für $k,n \in \mathbb{Z}$ folgt (2.11) über:

$$(a;q)_{n+k} = \prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-a\,q^j}{1-a\,q^{n+k+j}} = \prod_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1-a\,q^j}{1-a\,q^{n+j}}\,\frac{1-a\,q^{n+j}}{1-a\,q^{n+k+j}}\right) = (a;q)_n\,(a\,q^n;q)_k.$$

Für $k,n \in \mathbb{Z}$ gilt aufgrund der bereits bewiesenen Identitäten

$$(a;q)_{n-k} \overset{(2.11)}{=} (a;q)_n\,(a\,q^n;q)_{-k} \overset{(2.8)}{=} (-1)^k\left(q^{1-n}/a\right)^k q^{\binom{k}{2}}\,\frac{(a;q)_n}{(q^{1-n}/a;q)_k},$$

also Gleichung (2.12); setzen wir $a=q$, führt dies zu Gleichung (2.13). Eine weitere Folgerung ist Identität (2.14):

$$\frac{(q^{-n};q)_{n-k}}{(q;q)_{n-k}} \overset{(2.12)}{=} q^{k\,(n+1)}\,\frac{(q^{-n};q)_n}{(q;q)_k}\,\frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_n} \overset{(2.10)}{=} (-1)^n\,q^{-n\,(n+1)/2}\,q^{(n+1)\,k}\,\frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k}.$$

Die Gültigkeit von Gleichung (2.15) folgt über

$$(a\,q^n;q)_k = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1-a\,q^{n+j}}{1-a\,q^{n+k+j}} = \prod_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-a\,q^{n+j}}{1-a\,q^j} \, \frac{1-a\,q^j}{1-a\,q^{n+k+j}} \right) = \frac{(a;q)_{n+k}}{(a;q)_n}$$

nach Anwendung von (2.11). Durch eine analoge Argumentation erhält man (2.16). Gleichung (2.17) beruht nun offensichtlich auf einer Umsortierung des Produktes $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1-a\,q^j}{1-a\,q^{k\,n+j}}$. Identität (2.18) ergibt sich aus der Faktorisierung $1-a^2\,q^{2\,j} = \left(1+a\,q^j\right)\left(1-a\,q^j\right)$. □

Damit können wir nun für den Binomialsatz (2.2) eine q-Version liefern, die von Cauchy, Jacobi und Heine hergeleitet wurde (siehe [Hei47]):[11]

Satz 2.3 (q-Binomialsatz) *Für $a, q, z \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $|z| < 1$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k \;=\; \frac{(a\,z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}. \tag{2.20}$$

Beweis: Definiere $f(a,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k$. Dann folgt mit $1-a = (1-a\,q^k) - a\,(1-q^k)$

$$\begin{aligned} f(a,z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a\,q;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \left((1-a\,q^k) - a\,(1-q^k)\right) z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a\,q;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k + a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a\,q;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}\, z^k \\ &= (1-a\,z)\, f(a\,q,z). \end{aligned}$$

Per Induktion erhalten wir somit

$$f(a,z) \;=\; (a\,z;q)_n\, f(a\,q^n,z), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.21}$$

Ferner ist wegen $|q| < 1$ und $|z| < 1$ das Produkt $(a\,z;q)_\infty$ bzw. $f(a\,q^n,z)$ konvergent und die Funktion $f(a,z)$ stetig in a, wodurch wir aus (2.21) mit $n \to \infty$ erhalten

$$f(a,z) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left((a\,z;q)_n\, f(a\,q^n,z)\right) \;=\; (a\,z;q)_\infty\, f(0,z). \tag{2.22}$$

Nun ist aber entsprechend (2.1) $f(q,z) = (1-z)^{-1}$, so daß wir aus (2.22) mit $a = q$ den Anfangswert $f(0,z) = 1/(z;q)_\infty$ erhalten. □

Als eine unmittelbare Konsequenz ergibt sich aus dem q-Binomialsatz die Produktformel

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b;q)_k}{(q;q)_k}\, (a\,z)^k\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\,b;q)_n}{(q;q)_n}\, z^n, \qquad |q| < 1,\ |z| < 1.$$

[11] Die folgenden Sätze und deren Beweise entstammen dem Buch [GR90].

Vergleichen wir in dieser Gleichung den Koeffizienten von z^n, so folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a;q)_{n-k}\,(b;q)_k}{(q;q)_{n-k}\,(q;q)_k}\,a^k \;=\; \frac{(a\,b;q)_n}{(q;q)_n}.$$

Definieren wir den *q-Binomialkoeffizienten* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ durch

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \;=\; \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}}, \qquad k \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.23}$$

so erhalten wir eine q-Version des Binomialsatzes (2.3):

$$(a\,b;q)_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (a;q)_{n-k}\,(b;q)_k\,a^k. \tag{2.24}$$

2.3 q-hypergeometrische Reihen

Betrachtet man Gleichung (2.2) und (2.3), so ist auf den ersten Blick nicht klar, daß (2.3) ein Spezialfall von (2.2) ist. Hierfür erweist sich die Definition der *allgemeinen hypergeometrischen Funktion* oder *Reihe* als nützlich:

$${}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\,(a_2)_k \cdots (a_r)_k}{(b_1)_k\,(b_2)_k \cdots (b_s)_k}\,\frac{z^k}{k!}, \tag{2.25}$$

wobei $(a)_k = a\,(a+1)\cdots(a+k-1)$. So können wir z. B. Gleichung (2.2) und (2.3) schreiben als

$${}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \;=\; (1-z)^{-a} \qquad \text{bzw.} \qquad y^n \cdot {}_1F_0\left(\begin{matrix} -n \\ - \end{matrix} \,\middle|\, -\frac{x}{y}\right) \;=\; (x+y)^n,$$

wobei der Strich die Abwesenheit eines Parameters andeutet. Der Vorteil dieser Notation liegt auf der Hand: Sobald wir eine ${}_1F_0$-Funktion antreffen, können wir die Summe gemäß dem Binomialsatz auswerten.

Kennzeichnend für die allgemeine hypergeometrische Funktion ist, daß der Quotient aufeinanderfolgender Summanden ein rationaler Ausdruck ist. Dementsprechend definieren wir die *allgemeine q-hypergeometrische Funktion* oder *Reihe* als

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} \,\middle|\, q;\, z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_r;q)_k}{(b_1, b_2, \ldots, b_s;q)_k}\,\frac{z^k}{(q;q)_k}\,\left((-1)^k\,q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r}, \tag{2.26}$$

wobei $(a_1, a_2, \ldots, a_r;q)_k = \prod_{j=1}^{r} (a_j;q)_k$ sei. Bezeichnen wir den Summanden von (2.26) mit f_k, so folgt

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} \;=\; \frac{\left(1-a_1\,q^k\right)\left(1-a_2\,q^k\right)\cdots\left(1-a_r\,q^k\right)}{\left(1-b_1\,q^k\right)\left(1-b_2\,q^k\right)\cdots\left(1-b_s\,q^k\right)}\,\frac{(-q^k)^{1+s-r}\,z}{1-q^{k+1}}. \tag{2.27}$$

Dabei heißt f_k q-hypergeometrisch bzgl. k, falls der Quotient f_{k+1}/f_k rational in q^k ist. Andererseits läßt sich offenbar jede in q^k rationale Funktion in der Form (2.27) schreiben. Also ist jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$, für die g_{k+1}/g_k rational in q^k ist und $g_0 = 1$, eine allgemeine q-hypergeometrische Reihe der Form (2.26).

Aufgrund der einfachen Struktur des Quotienten f_{k+1}/f_k bietet sich zur Bestimmung des Konvergenzradius' von ${}_r\phi_s$ das Quotientenkriterium an. So erhalten wir:

$0 < |q| < 1$: Ist $r \leq s$, so konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$; gilt hingegen $r = s+1$, so ist dies nur für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Fall. Die Reihe divergiert für $z \neq 0$ und $r > s+1$, sofern sie nicht terminiert.

$|q| > 1$: Hier konvergiert die Reihe absolut, falls $|z| < |b_1\, b_2 \cdots b_s\, q| \,/\, |a_1\, a_2 \cdots a_r|$ gilt. Ist ${}_r\phi_s$ eine echt unendliche Reihe, so divergiert sie für $|z| > |b_1\, b_2 \cdots b_s\, q| \,/\, |a_1\, a_2 \cdots a_r|$.

Damit die Reihe (2.26) wohldefiniert ist, muß

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_s\} \cap \left\{q^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0\right\} \;=\; \emptyset$$

gelten, was wir im folgenden stets annehmen wollen. Zudem sieht man, daß die Reihe (2.26) genau dann abbricht, wenn es einen oberen Parameter a_i mit $a_i \in \left\{q^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0\right\}$ gibt.

Bemerkung 2.4: Die Summanden f_k der *hypergeometrischen Reihe* (2.25) erfüllen die Bedingung $f_{k+1}/f_k \in \mathbb{C}[k]$, so daß diese eine Verallgemeinerung der geometrischen Reihe (2.1) darstellt bzw. die geometrische Reihe als Spezialfall enthält:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \;=\; {}_1F_0\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix}\;\middle|\; z\right).$$

Eine weitere Verallgemeinerung stellt nun die q-hypergeometrische Reihe (2.26) dar, deren Summanden f_k die Bedingung $f_{k+1}/f_k \in \mathbb{C}(q^k)$ erfüllen: Zumindest formal erhalten wir

$$\lim_{q\to 1^-} {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}q^{a_1}, q^{a_2}, \ldots, q^{a_r}\\ q^{b_1}, q^{b_2}, \ldots, q^{b_s}\end{matrix}\;\middle|\; q;\, (q-1)^{1+s-r}\, z\right) \;=\; {}_rF_s\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_r\\ b_1, b_2, \ldots, b_s\end{matrix}\;\middle|\; z\right). \tag{2.28}$$

Der zusätzliche Faktor $\left((-1)^k\, q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r}$ in der Definition von ${}_r\phi_s$ ist notwendig, um die Gültigkeit des folgenden *konfluenten* Grenzprozesses (zumindest formal) zu ermöglichen:

$$\lim_{a_r\to\infty} {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_r\\ b_1, b_2, \ldots, b_s\end{matrix}\;\middle|\; q;\, \frac{z}{a_r}\right) \;=\; {}_{r-1}\phi_s\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}\\ b_1, b_2, \ldots, b_s\end{matrix}\;\middle|\; q;\, z\right).$$

Dieser basiert auf dem Grenzwert (vgl. (2.19))

$$\begin{aligned}
\lim_{a_r\to\infty} \frac{(a_r;q)_k}{{a_r}^k} &= \begin{cases} \lim\limits_{a_r\to\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \left({a_r}^{-1} - q^j\right), & k \geq 0,\\ \lim\limits_{a_r\to\infty} \prod_{j=1}^{-k} \left({a_r}^{-1} - q^{-j}\right)^{-1}, & k < 0.\end{cases}\\
&= \begin{cases} \prod_{j=0}^{k-1} (-q)^j, & k \geq 0,\\ \prod_{j=1}^{-k} (-q)^j, & k < 0.\end{cases}\\
&= \begin{cases} (-1)^k\, q^{k\,(k-1)/2}, & k \geq 0,\\ (-1)^k\, q^{(-k+1)\,(-k)/2}, & k < 0.\end{cases}\\
&= (-1)^k\, q^{\binom{k}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Beachte jedoch, daß man durch Hinzufügen von Nullen zur oberen oder unteren Parameterliste einer gegebenen ${}_r\phi_s$-Funktion den Faktor $\left((-1)^k\, q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r}$ verschwinden lassen kann, ohne den Summanden ansonsten zu ändern. ◁

Der Vollständigkeit halber wollen wir zum Abschluß noch die *allgemeine bilaterale q-hypergeometrische Funktion* oder *Reihe* erwähnen, die über

$${}_r\psi_s\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots, a_r\\ b_1, b_2, \ldots, b_s\end{matrix}\;\middle|\; q;\, z\right) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_r; q)_k}{(b_1, b_2, \ldots, b_s; q)_k}\, z^k\, \left((-1)^k\, q^{\binom{k}{2}}\right)^{s-r} \tag{2.30}$$

definiert ist.

2.4 Summations- und Transformationsformeln

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir bereits den q-Binomialsatz kennengelernt, der im wesentlichen eine Summationsformel für die ${}_1\phi_0$-Funktion darstellt:

$$ {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} a \\ \text{—} \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) = \frac{(a\,z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}, \qquad a,q,z \in \mathbb{C},\ |q|<1,\ |z|<1. \tag{2.31} $$

1847 publizierte Heine (siehe auch [Hei47]) folgende Transformationsformel:

Satz 2.5 (Heines Transformationsformel für ${}_2\phi_1$) *Seien $a,b,c,z \in \mathbb{C}$, $|b|<1$, $|q|<1$ und $|z|<1$. Dann gilt:*

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) = \frac{(b;q)_\infty\ (a\,z;q)_\infty}{(c;q)_\infty\ (z;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} c/b,z \\ a\,z \end{matrix}\middle|\, q;\, b\right). \tag{2.32} $$

Beweis: Entsprechend dem q-Binomialsatz 2.3 gilt

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k} \left(b\,q^n\right)^k = \frac{(c\,q^n;q)_\infty}{(b\,q^n;q)_\infty}, \tag{2.33} $$

also

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) &\overset{(2.6)}{=} \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n\ (c\,q^n;q)_\infty}{(q;q)_n\ (b\,q^n;q)_\infty}\, z^n \\ &\overset{(2.33)}{=} \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}\, z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k} \left(b\,q^n\right)^k \right) \\ &= \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}\, b^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} \left(z\,q^k\right)^n \right) \\ &\overset{(2.20)}{=} \frac{(b;q)_\infty}{(c;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(c/b;q)_k}{(q;q)_k}\, \frac{(a\,z\,q^k;q)_\infty}{(z\,q^k;q)_\infty}\, b^k \right) \\ &\overset{(2.6)}{=} \frac{(b;q)_\infty\ (a\,z;q)_\infty}{(c;q)_\infty\ (z;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} c/b,z \\ a\,z \end{matrix}\middle|\, q;\, b\right) \end{aligned} $$

□

Heine zeigte auch, daß Eulers Transformationsformel,

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\middle|\, z\right) = (1-z)^{c-a-b}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix}\middle|\, z\right), $$

ein q-Analogon besitzt. Wie im hypergeometrischen Fall läßt sich dieses durch eine mehrfache Anwendung von (2.32) herleiten:

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) &= \frac{(b;q)_\infty\ (a\,z;q)_\infty}{(c;q)_\infty\ (z;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} c/b,z \\ a\,z \end{matrix}\middle|\, q;\, b\right). \\ &= \frac{(c/b;q)_\infty\ (b\,z;q)_\infty}{(c;q)_\infty\ (z;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a\,b\,z/c,\ b \\ b\,z \end{matrix}\middle|\, q;\, \frac{c}{b}\right). \\ &= \frac{(a\,b\,z/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} c/a, c/b \\ c \end{matrix}\middle|\, q;\, \frac{a\,b\,z}{c}\right). \end{aligned} $$

Fassen wir nun noch die Bedingungen an die Parameter a, b, c, q und z zusammen, so erhalten wir $|a\,b\,z| < |c| < |b| < 1, |q| < 1$ und $|z| < 1$. Durch analytische Fortsetzung können wir diese jedoch auf $|a\,b\,z| < |c|$ und $|q|, |z| < 1$ reduzieren.

Korrolar 2.6 *Sind $a, b, c, z \in \mathbb{C}$ mit $|a\,b\,z| < |c|$, $|q| < 1$ und $|z| < 1$, so gilt:*

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, z\right) = \frac{(a\,b\,z/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} c/a, c/b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, \frac{a\,b\,z}{c}\right). \tag{2.34} $$

Mit Hilfe des q-Binomialsatzes und Heines Transformationsformel können wir nun eine q-Version der Gaußschen Summationsformel

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, 1\right) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}, \qquad \text{wobei } a, b, c \in \mathbb{C},\ Re(c-a-b) > 0 \tag{2.35} $$

herleiten:

Satz 2.7 (Heines ${}_2\phi_1$-Summationsformel) *Sind $a, b, c, q \in \mathbb{C}$ mit $|c| < |a\,b|$ und $|q| < 1$, so gilt*

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, \frac{c}{a\,b}\right) = \frac{(c/a;q)_\infty\,(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty\,(c/(a\,b);q)_\infty}. \tag{2.36} $$

Beweis: Gilt $|q| < 1$, $|b| < 1$ und $|c| < |a\,b|$, so folgt mit Satz 2.5 und 2.3

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, \frac{c}{a\,b}\right) &\overset{(2.32)}{=} \frac{(b;q)_\infty\,(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty\,(c/(a\,b);q)_\infty}\, {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} c/(a\,b) \\ - \end{matrix} \middle| \, q;\, b\right). \\ &\overset{(2.20)}{=} \frac{(c/a;q)_\infty\,(c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty\,(c/(a\,b);q)_\infty}. \end{aligned} $$

Offenbar konvergieren beide Seiten von Gleichung (2.36) für beliebige $b \in \mathbb{C}$. Nach analytischer Fortsetzung bleiben somit $|q| < 1$ und $|c| < |a\,b|$ als einzige Einschränkungen übrig. □

Bevor wir nun eine endliche Version von Heines Summationsformel mit $a = q^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ angeben, d. h. ein q-Analogon zur Chu-Vandermonde-Identität

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix} \middle| \, 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}, \tag{2.37} $$

wollen wir zunächst noch eine nützliche Transformationsformel angeben. So kann man für jede endliche Reihe die Summationsreihenfolge umdrehen und erhält

$$ \sum_{k=0}^{n} f_k\, z^k = z^n \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}\,(1/z)^k. $$

Wenden wir dies auf ${}_{r+1}\phi_r(q^{-n}, a_1, \ldots, a_r;\ b_1, \ldots, b_r;\ q, z)$ an, so folgt unter Verwendung von Gleichung (2.12) und (2.14)

$$ \begin{aligned} {}_{r+1}\phi_r\left(\begin{matrix} q^{-n}, a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_r \end{matrix} \middle| \, q;\, z\right) &= (-1)^n\, q^{-n\,(n+1)/2}\, z^n\, \frac{(a_1, \ldots, a_r;q)_n}{(b_1, \ldots, b_n;q)_n} \cdot \\ &\qquad {}_{r+1}\phi_r\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{1-n}/b_1, \ldots, q^{1-n}/b_r \\ q^{1-n}/a_1, \ldots, q^{1-n}/a_r \end{matrix} \middle| \, q;\, \frac{b_1 \cdots b_r}{a_1 \cdots a_r}\, \frac{q^{n+1}}{z}\right). \end{aligned} \tag{2.38} $$

Korrolar 2.8 *Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $b, c, q \in \mathbb{C}$, so gilt*

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, \frac{c\, q^n}{b}\right) = \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n} \tag{2.39}$$

bzw.

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, q\right) = \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}\, b^n. \tag{2.40}$$

Beweis: Gleichung (2.39) entspricht Gleichung (2.36) mit $a = q^{-n}$. Die zweite Version ergibt sich durch eine Umkehrung der Summationsreihenfolge:

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, q\right) &\overset{(2.38)}{=} (-1)^n\, q^n\, q^{-n\,(n+1)/2}\, \frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}\, {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{1-n}/c \\ q^{1-n}/b \end{matrix} \middle| \, q;\, \frac{q^n\, c}{b}\right) \\ &\overset{(2.39)}{=} (-1)^n\, q^{-n\,(n-1)/2}\, \frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}\, \frac{(c/b;q)_n}{(q^{1-n}/b;q)_n} \\ &\overset{(2.12)}{=} b^n\, \frac{(c/b;q)_n}{(c;q)_n}. \end{aligned}$$

□

F. H. Jackson veröffentlichte 1910 in [Jac10] eine Formel, die eine ${}_2\phi_1$-Funktion in eine ${}_2\phi_2$-Funktion überführt:

Satz 2.9 (Jacksons Transformationsformel für ${}_2\phi_1$) *Seien $a, b, c, q, z \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $|z| < 1$. Dann gilt:*

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, z\right) = \frac{(a\,z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\, {}_2\phi_2\left(\begin{matrix} a, c/b \\ c, a\,z \end{matrix} \middle| \, q;\, b\,z\right). \tag{2.41}$$

Beweis: Unter Verwendung von Gleichung (2.39) folgt

$$ \frac{(b;q)_k}{(c;q)_k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\left(q^{-k};q\right)_j (c/b;q)_j}{(q;q)_j\, (c;q)_j} \left(b\, q^k\right)^j, \tag{2.42}$$

also gilt:

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| \, q;\, z\right) &\overset{(2.42)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\left(q^{-k};q\right)_j (c/b;q)_j}{(q;q)_j\, (c;q)_j} \left(b\, q^k\right)^j\right] \\ &\overset{(2.13)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k\, (c/b;q)_j}{(q;q)_{k-j}\, (q;q)_j\, (c;q)_j}\, z^k\, (-b)^j\, q^{\binom{j}{2}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} \frac{(a;q)_k\, (c/b;q)_j}{(q;q)_{k-j}\, (q;q)_j\, (c;q)_j}\, z^k\, (-b)^j\, q^{\binom{j}{2}} \\ &\overset{\substack{k\to k+j,\\ (2.11)}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(a;q)_j\, (c/b;q)_j}{(q;q)_j\, (c;q)_j} \left(-\,b\,z\right)^j q^{\binom{j}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a\,q^j;q\right)_k}{(q;q)_k}\, z^k\right] \\ &\overset{(2.20)}{=} \frac{(a\,z;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a;q)_j\, (c/b;q)_j}{(q;q)_j\, (c;q)_j\, (a\,z;q)_j} \left(b\,z\right)^j \left((-1)^j\, q^{\binom{j}{2}}\right)^{1+2-2}. \end{aligned}$$

$\square$

In derselben Arbeit leitete Jackson auch ein q-Analogon für Pfaffs Summationsformel,

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{(c-a)_n\,(c-b)_n}{(c)_n\,(c-a-b)_n}, $$

her:

Satz 2.10 *Sind $a, b, c, q \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt die Identität*

$$ {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, a\,b\,q^{1-n}/c \end{matrix} \middle| q;\, q\right) = \frac{(c/a;q)_n\,(c/b;q)_n}{(c;q)_n\,(c/(a\,b);q)_n}. \tag{2.43} $$

Beweis:

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} c/a, c/b \\ c \end{matrix} \middle| q;\, z\right) &\overset{(2.34)}{=} \frac{(c\,z/(a\,b);q)_\infty}{(z;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k\,(b;q)_k}{(c;q)_k\,(q;q)_k} \left(\frac{c\,z}{a\,b}\right)^k \\ &\overset{(2.20)}{=} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/(a\,b);q)_n}{(q;q)_n} z^n\right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k\,(b;q)_k}{(c;q)_k\,(q;q)_k} \left(\frac{c}{a\,b}\right)^k z^k\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(c/(a\,b);q)_{n-k}}{(q;q)_{n-k}} \frac{(a;q)_k\,(b;q)_k}{(c;q)_k\,(q;q)_k} \left(\frac{c}{a\,b}\right)^k\right] z^n \\ &\overset{(2.12)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c/(a\,b);q)_n\,(q^{-n};q)_k}{(q;q)_n\,(a\,b\,q^{1-n}/c;q)_k} \frac{(a;q)_k\,(b;q)_k}{(c;q)_k\,(q;q)_k} q^k\right] z^n \\ &\overset{(2.20)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(c/(a\,b);q)_n}{(q;q)_n} {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, a\,b\,q^{1-n}/c \end{matrix} \middle| q;\, q\right)\right] z^n \end{aligned} $$

Durch Vergleich der Koeffizienten von z^n erhalten wir somit

$$ \frac{(c/a;q)_n\,(c/b;q)_n}{(c;q)_n\,(q;q)_n} = \frac{(c/(a\,b);q)_n}{(q;q)_n} {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} a, b, q^{-n} \\ c, a\,b\,q^{1-n}/c \end{matrix} \middle| q;\, q\right). $$

$\square$

1941 wurde von Bailey – und davon unabhängig 1942 von Daum (siehe [GR90]) – eine q-Version von Kummers Identität

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix} \middle| -1\right) = \frac{\Gamma(1+a-b)\,\Gamma(1+\frac{a}{2})}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)} $$

entdeckt, die im folgenden Satz angegeben ist.

Satz 2.11 (Bailey-Daum Summationsformel) *Seien $a, b, q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ und $|q/b| < 1$. Dann gilt:*

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a\,q/b \end{matrix} \middle| q;\, -\frac{q}{b}\right) = \frac{(-q;q)_\infty\,\left(a\,q;q^2\right)_\infty\,\left(a\,q^2/b^2;q^2\right)_\infty}{(a\,q/b;q)_\infty\,(-q/b;q)_\infty}. \tag{2.44} $$

Beweis: Durch eine Umsortierung des Produktes $(a;q)_\infty$ erhält man die Identität

$$(a;q)_\infty = \left(a;q^2\right)_\infty \left(a\,q;q^2\right)_\infty , \tag{2.45}$$

die wir zur Herleitung von (2.44) verwenden können:

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a,b \\ a\,q/b \end{matrix}\middle|\, q;\, -\frac{q}{b}\right) &\overset{(2.32)}{=} \frac{(a;q)_\infty\,(-q;q)_\infty}{(a\,q/b;q)_\infty\,(-q/b;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q/b,-q/b \\ -q \end{matrix}\middle|\, q;\, a\right) \\ &\overset{(2.18)}{=} \frac{(a;q)_\infty\,(-q;q)_\infty}{(a\,q/b;q)_\infty\,(-q/b;q)_\infty}\sum_{k=0}^\infty \frac{\left(q^2/b^2;q^2\right)_k}{\left(q^2;q^2\right)_k}\,a^k \\ &\overset{(2.20)}{=} \frac{(a;q)_\infty\,(-q;q)_\infty}{(a\,q/b;q)_\infty\,(-q/b;q)_\infty}\,\frac{\left(a\,q^2/b^2;q^2\right)_\infty}{\left(a;q^2\right)_\infty} \\ &\overset{(2.45)}{=} \frac{(-q;q)_\infty\,\left(a\,q;q^2\right)_\infty\,\left(a\,q^2/b^2;q^2\right)_\infty}{(a\,q/b;q)_\infty\,(-q/b;q)_\infty}. \end{aligned}$$

□

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch Ramanujans Summationsformel für die allgemeine bilaterale q-hypergeometrische Funktion ${}_1\psi_1$ betrachten. Diese ist eine Verallgemeinerung des q-Binomialsatzes, was offensichtlich wird, wenn wir als unteren Parameter der ${}_1\psi_1$-Funktion q^n, $n \in \mathbb{N}_0$ wählen.

Satz 2.12 (Ramanujans ${}_1\psi_1$-Summationsformel) *Für $a,b,q,z \in \mathbb{C}$ mit $|b/a| < |z| < 1$ und $|q| < 1$ gilt:*

$${}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) = \frac{(q;q)_\infty\,(b/a;q)_\infty\,(a\,z;q)_\infty\,(q/(a\,z);q)_\infty}{(b;q)_\infty\,(q/a;q)_\infty\,(z;q)_\infty\,(b/(a\,z);q)_\infty}. \tag{2.46}$$

Beweis: Setze $f(b) = {}_1\psi_1(a;\, b;\, q,z)$. Zunächst einmal wollen wir uns überlegen, wann die Reihe überhaupt konvergiert.

$$\begin{aligned} {}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(a;q)_k}{(b;q)_k}\,z^k + \sum_{k=1}^\infty \frac{(a;q)_{-k}}{(b;q)_{-k}}\,z^{-k} \\ &\overset{(2.8)}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{(a;q)_k}{(b;q)_k}\,z^k + \sum_{k=1}^\infty \frac{(q/b;q)_k}{(q/a;q)_k}\left(\frac{b}{a\,z}\right)^k. \end{aligned}$$

Offenbar konvergiert $f(b)$ für $|q| < 1$, falls $|b/a| < |z| < 1$. Für $|b| < \min\{1, |a\,z|\}$ und $|z| < 1$ ist also $f(b)$ stetig in b. Mittels

$$\begin{aligned} {}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) - a\,{}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\middle|\, q;\, q\,z\right) &= \sum_{k=-\infty}^\infty \left(1 - a\,q^k\right)\frac{(a;q)_k}{(b;q)_k}\,z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{(a;q)_{k+1}}{(b;q)_k}\,z^k \\ &= (1-b/q)\,z^{-1}\,{}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b/q \end{matrix}\middle|\, q;\, z\right) \end{aligned}$$

folgt mit der Transformation $b \to b\,q$

$$\begin{aligned} f(b\,q) - (1-b)\,z^{-1} f(b) &= a\,{}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b\,q \end{matrix}\,\middle|\, q;\, q\,z\right) \\ &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(b\,q;q)_k}\,(q\,z)^k \\ &= -a\,b^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - b\,q^k - 1\right) \frac{(a;q)_k}{(b\,q;q)_k}\, z^k \\ &= -a\,b^{-1}\,(1-b)\,f(b) + a\,b^{-1}\,f(b\,q). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $f(b)$ die Rekursionsgleichung

$$f(b) = \frac{1 - b/a}{(1-b)\,(1-b/(a\,z))}\, f(b\,q), \qquad \text{bzw.} \qquad f(b) = \frac{(b/a;q)_n}{(b;q)_n\,(b/(a\,z);q)_n}\, f(b\,q^n)$$

nach $(n-1)$-maliger Iteration. Da nun $f(b)$ stetig ist, bekommen wir mit $n \to \infty$ den Grenzwert

$$f(b) = \frac{(b/a;q)_\infty}{(b;q)_\infty\,(b/(a\,z);q)_\infty}\, f(0). \tag{2.47}$$

Mit Hilfe des q-Binomialsatzes können wir jedoch $f(q)$ explizit angeben,

$$f(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\, z^k = {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}\,\middle|\, q;\, z\right) \overset{(2.20)}{=} \frac{(a\,z;q)_\infty}{(z;q)_\infty},$$

womit sich aus Gleichung (2.47) für $b = q$

$$f(0) = \frac{(q;q)_\infty\,(q/(a\,z);q)_\infty}{(q/a;q)_\infty}\, f(q) = \frac{(q;q)_\infty\,(q/(a\,z);q)_\infty\,(a\,z;q)_\infty}{(q/a;q)_\infty\,(z;q)_\infty}$$

ergibt. Setzen wir nun den Anfangswert $f(0)$ in Gleichung (2.47) ein, so erhalten wir (2.46). $\square$

Ersetzen wir a und z in (2.46) durch a^{-1} bzw. $a\,z$, so erhalten wir die Gleichung

$${}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a^{-1} \\ b \end{matrix}\,\middle|\, q;\, a\,z\right) = \frac{(q;q)_\infty\,(a\,b;q)_\infty\,(z;q)_\infty\,(q/z;q)_\infty}{(b;q)_\infty\,(a\,q;q)_\infty\,(a\,z;q)_\infty\,(b/z;q)_\infty}, \tag{2.48}$$

sofern $|b| < |z| < \left|a^{-1}\right|$. Mittels der weiteren Transformationen $b \to 0$, $q \to q^2$ und $z \to q\,z$ ergibt sich

$${}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a^{-1} \\ 0 \end{matrix}\,\middle|\, q^2;\, a\,q\,z\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(a^{-1};q^2\right)_k (a\,q\,z)^k = \frac{\left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q\,z;q^2\right)_\infty \left(q/z;q^2\right)_\infty}{\left(a\,q^2;q^2\right)_\infty \left(a\,q\,z;q^2\right)_\infty}. \tag{2.49}$$

Bilden wir nun den Grenzwert für $a \to 0$, so erhalten wir mit (2.29) die *Jacobische Tripelproduktidentität*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, q^{k^2}\, z^k = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(q\,z;q^2\right)_\infty \left(q/z;q^2\right)_\infty. \tag{2.50}$$

3 q-Gosper

Aus der Analysis wissen wir, daß die bestimmte Integration von Funktionen trivial ist, sofern wir eine Stammfunktion kennen. Ist $f(x) = \frac{d}{dx}g(x)$, so liefert uns der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; g(b) - g(a).$$

Betrachten wir nun die Summation als diskretes Analogon des Integrierens, so stellt sich die Frage, ob es eine *diskrete* Version des Differentialoperator gibt, die eine einfache Berechnung einer Summe ermöglicht. Die Definition des Differentialoperators,

$$\frac{d}{dx}g(x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

führt uns mit dem diskreten Wert $h = 1$ zu der Definition des *Differenzenoperators*:

Definition 3.1

(i) Den Operator Δ_k, mit

$$\Delta_k G(k) := G(k+1) - G(k)$$

bezeichnen wir als den (Vorwärts-) Differenzenoperator. Ferner nennen wir den Operator $\mathcal{S}_k$, definiert durch $\mathcal{S}_k G(k) := G(k+1)$, Shiftoperator.

(ii) Gilt

$$F(k) \;=\; \Delta_k G(k) \tag{3.1}$$

so heißt $G(k)$ eine diskrete Stammfunktion von $F(k)$ und wir schreiben

$$\sum F(k)\,\delta k \;=\; G(k). \tag{3.2}$$

Ist nun $G(k)$ eine diskrete Stammfunktion von $F(k)$, so ist die Bestimmung der Summe $\sum_{k=a}^{b} F(k)$ trivial:

$$\sum_{k=a}^{b} F(k) \;=\; \sum_{k=a}^{b}\big(G(k+1) - G(k)\big) \;=\; G(b+1) - G(a). \tag{3.3}$$

Diesen Prozeß bezeichnen wir mit *bestimmter Summation*, im Gegensatz zur *unbestimmten Summation*, wo wir lediglich an der Bestimmung einer diskreten Stammfunktion interessiert sind.

In der Analysis ist die algorithmische Berechnung von Stammfunktionen für eine bestimmte Funktionenklasse mittels des Risch-Algorithmus möglich. Im diskreten Fall gibt es den Gosper-Algorithmus (siehe [Gos78]), der diskrete Stammfunktionen hypergeometrischer Terme findet.

Definition 3.2 *Ein Term $F(k)$ heißt* **q***-hypergeometrisch, falls für $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ eine rationale Funktion $R(k) \in \mathbb{F}\left({q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\right)$ existiert, so daß $F(k+1) = R(k)\,F(k)$.*

In Zukunft wollen wir unter einer diskreten Stammfunktion stets eine **q**-hypergeometrische diskrete Stammfunktion verstehen, da wir nur an solchen interessiert sind. Dabei wollen wir die Bestimmung einer Stammfunktion zunächst unter einem rein algebraischen Gesichtspunkt betrachten: Zu einem gegebenen **q**-hypergeometrischen Term $F(k)$ suchen wir eine diskrete Stammfunktion $G(k)$, so daß Gleichung (3.2) für beliebige *symbolische* k gilt.

Da wir jedoch meist diskrete Stammfunktionen suchen, um eine konkrete bestimmte Summation zu lösen, müssen wir uns dann noch Gedanken machen, ob man die Stammfunktion zur Bestimmung der Summe gemäß Gleichung (3.3) einsetzen kann. D. h. $G(k)$ muß für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq k \leq b+1$ wohldefiniert sein.

Bemerkung 3.3: Vom theoretischen Aspekt ist klar, daß für alle $k \in \{a, \dots, b\}$ auch $F(k)$ wohldefiniert sein muß. Implementiert man nun den **q**-Gosper-Algorithmus, so kann dies ein achtloser Benutzer leicht vergessen. T. H. Koornwinder nimmt deshalb diese Überprüfung in seinem Programm `qzeilb` (Erweiterung des **q**-Gosper-Algorithmus) selbst vor. Weitere Prüfungen sollen dem Benutzer nun garantieren, daß – falls das Programm ein Ergebnis liefert – dieses auch korrekt ist. (Leider ist dadurch das Programm ziemlich restriktiv geworden; für eine genaue Beschreibung siehe [Koo93].)

Meines Erachtens ist dies ein wichtiger Ansatz, da durch die *symbolische* Rechenfähigkeit von Computeralgebrasystemen leicht fehlerhafte Ergebnisse erzeugt werden können: So führt man häufig Rechnungen mit symbolischen Parametern durch, die für konkrete Werte nicht mehr gültig sind. Dabei ist vom Trivialbeispiel (Dividieren eines Terms durch x und späteres Ersetzen von x durch 0) bis zu komplexeren (Integration von x^k, was meist zur Stammfunktion $(x^{k+1})/(k+1)$ führt und Ersetzen von k durch -1) alles möglich.

Problematisch wird es vor allen Dingen, wenn dieses Ersetzen von Parametern zwar ein falsches Ergebnis erzeugt, dieses aber nicht sofort als solches zu erkennen ist, wie z. B. in dem Fall, in dem man in einer Rechnung unterwegs durch x teilt, aber das Resultat bei der Ersetzung $x \to 0$ wohldefiniert ist.

Da man Computeralgebrasysteme meist zur Lösung komplexer Probleme einsetzt, ist eine Kontrolle durch Nachrechnen per Hand meist unmöglich. Insofern empfiehlt es sich, sofern eine Verifikation durch eine andere Methode unmöglich ist, bei Ersetzung von Parametern durch konkrete Werte, die Rechnungen im Zweifelsfall noch einmal zu wiederholen. ◁

Die Idee, die dem **q**-Gosper-Algorithmus zugrundeliegt, ist sehr einfach und basiert auf folgenden Eigenschaften:

1. Teilt man Gleichung (3.1) durch $G(k)$, so sieht man sofort, daß die diskrete Stammfunktion $G(k)$ ein in q^k rationales Vielfaches von $F(k)$ sein muß.

2. Teilt man Gleichung (3.1) dahingegen durch $F(k)$ so erhält man

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} Z(k+1) - Z(k) = 1, \qquad \text{wobei } Z(k) = \frac{G(k)}{F(k)} \in \mathbb{F}\big(q^k\big). \tag{3.4}$$

   D. h. um $G(k)$ zu bestimmen, genügt es, eine inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung mit rationalen Koeffizienten zu lösen.

3. Hierfür berechnet man ein Polynom $P(k)$, ein Vielfaches des Nenners von $Z(k)$ und ersetzt dann in Gleichung (3.4) $Z(k)$ durch $V(k)/P(k)$ mit noch unbestimmten $V(k)$. Damit haben wir das ursprüngliche Problem auf das Bestimmen einer Polynomlösung $V(k)$ einer inhomogenen Rekursionsgleichung 1. Ordnung reduziert.

Betrachtet man nun Gospers Algorithmus (bzw. die **q**-Variante), so stellt man fest, daß seine Umsetzung ziemlich trickreich ist und dessen Funktionsweise eher verborgen bleibt:

Algorithmus 3.1 **q**-Gosper-Algorithmus

Input: $F(k)$, **q**-hypergeometrisch bzgl. k.
Output: Eine diskrete Stammfunktion $G(k)$, falls eine existiert.
define $P(k), Q(k), R(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\right]$, so daß $\gcd(Q(k), R(k+j)) = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{P(k+1)}{P(k)}\,\frac{Q(k)}{R(k)}.$$

if $\Big(\exists\, X(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \dots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right] : \ Q(k)\,X(k) - R(k-1)\,X(k-1) = P(k)\Big)$ **then**
  return $G(k) = \dfrac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k)$
else
  return „Es gibt keine diskrete Stammfunktion zu $F(k)$."
end if

3.1 Die Dispersion

Definition 3.4 *Seien* $Q(k), R(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\right]$. *Dann heißt*

$$\mathrm{dispset}_k\big(Q(k), R(k)\big) := \big\{j \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \gcd\big(Q(k), R(k+j)\big) \neq 1\big\}$$

und $\mathrm{disp} : \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\right]^2 \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty, \infty\}$ *mit*

$$\mathrm{disp}_k\big(Q(k), R(k)\big) := \max\big\{j \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \gcd\big(Q(k), R(k+j)\big) \neq 1\big\}$$

die Dispersionsmenge bzw. Dispersion von $Q(k)$ *und* $R(k)$ *bzgl.* k. *Ist die Dispersionsmenge nicht beschränkt, definiere* $\max\big(\mathrm{dispset}_k\big(Q(k), R(k)\big)\big) = \infty$; $\max\emptyset = -\infty$.

Ferner setze

$$\mathbf{q}\text{-}\gcd\big(Q(k), R(k)\big) := \gcd(Q(k), R(k)) \quad (\mathbf{q}\text{-mod } {q_1}^k, \dots, {q_m}^k)$$

und

$$\mathbf{q}\text{-}\mathrm{disp}_k\big(Q(k), R(k)\big) := \max\big\{j \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \mathbf{q}\text{-}\gcd\big(Q(k), R(k+j)\big) \neq 1\big\}.$$

Die Dispersion zweier Polynome spielt eine wichtige Rolle in Gospers Algorithmus. Dabei werden wir im nächsten Abschnitt die Information benötigen, in welchen Fällen die Dispersion endlich ist.

Bemerkung 3.5: Seien $Q(k), R(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\right]$. Angenommen, $\mathrm{disp}_k\big(Q(k), R(k)\big) = \infty$, d. h. für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $j \in \mathbb{N}_{\geq N}$ mit $\gcd\big(Q(k), R(k+j)\big) \not\equiv 1$.
Da $Q(k)$ und $R(k)$ nur endlich viele irreduzible Faktoren besitzen, muß es somit nach dem Schubfachprinzip einen irreduziblen Faktor $A(k)$ von $Q(k)$ und einen irreduziblen Faktor $B(k)$ von $R(k)$ geben, so daß $\gcd\big(A(k), B(k+j)\big) \not\equiv 1$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Entsprechend der Bemerkung können wir unsere Betrachtung also zunächst auf irreduzible Polynome beschränken. Für diese berechnet der folgende Algorithmus die Dispersion:

Algorithmus 3.2 prime-q-disp

Input: $A(k), B(k) \in \mathbb{F}\big[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\big]$ irreduzibel.
Output: $\mathrm{disp}_k\big(A(k), B(k)\big)$.

$\mathbf{l} := \mathrm{multildeg}\,(A(k))$; $\mathbf{L} := \mathrm{multideg}\,(A(k))$;
$\mathbf{n} := \mathrm{multildeg}\,(B(k))$; $\mathbf{N} := \mathrm{multideg}\,(B(k))$;
if $(\mathbf{l} \neq \mathbf{n})$ **or** $(\mathbf{L} \neq \mathbf{N})$ **then**
  return $-\infty$;
else
  $\mathcal{J} := \big\{ j \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \mathbf{q}^{j(\mathbf{N}-\mathbf{n})} = \alpha_{\mathbf{N}}/\alpha_{\mathbf{n}} \cdot \beta_{\mathbf{n}}/\beta_{\mathbf{N}} \big\}$;
  if $\big(\mathcal{J} = \{\}\big)$ **then**
    return $-\infty$;
  else if $\big(|\mathcal{J}| > 1\big)$ **then**
    return ∞;
  else if $\big(\beta_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}^{j\,\mathbf{N}}\, A(k) - \alpha_{\mathbf{N}}\, B(k+j) = 0,\ j \in \mathcal{J}\big)$ **then**
    return j;
  else
    return $-\infty$;
  end if
end if

Der Algorithmus basiert auf einer notwendige Bedingung für $j \in \mathrm{dispset}_k\big(A(k), B(k)\big)$, mit deren Hilfe *mögliche* Kandidaten bestimmt werden. Anschließend werden diese anhand der hinreichenden Bedingung im „**else if**"-Teil überprüft. Die Korrektheit wird durch folgendes Lemma gesichert (vgl. [Koe98], [Koo93]):

Lemma 3.6 *Seien* $A(k), B(k) \in \mathbb{F}\big[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\big]$ *irreduzibel und* $\mathcal{J} := \mathrm{dispset}_k\big(A(k), B(k)\big)$. *Dann gilt:*

(i) $$|\mathcal{J}| = \infty \iff \text{prime-}q\text{-disp}\big(A(k), B(k)\big) = \infty \iff \exists\, i \in \{1, 2, \dots, m\} \textit{ mit } \gcd\big(A(k), {q_i}^k\big) \neq 1 \neq \gcd\big(B(k), {q_i}^k\big),$$

(ii) $$|\mathcal{J}| < \infty \iff \mathcal{J} = \big\{\text{prime-}q\text{-disp}\big(A(k), B(k)\big)\big\}$$

Beweis: Seien $A(k), B(k) \in \mathbb{F}\big[{q_1}^k, \dots, {q_m}^k\big]$ irreduzibel. Angenommen es gibt ein $j \in \mathbb{N}_0$ mit $\gcd\big(A(k), B(k+j)\big) \neq 1$. Da nun $A(k)$ und $B(k)$ bzw. $B(k+j)$ irreduzibel sind, folgt

$$\mathrm{multildeg}\,(A(k)) = \mathrm{multildeg}\,(B(k)) \quad \text{und} \quad \mathrm{multideg}\,(A(k)) = \mathrm{multideg}\,(B(k))\,.$$

Schreibe nun $A(k)$ und $B(k)$ als

$$\begin{aligned} A(k) &= \alpha_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}^{k\mathbf{N}} + \dots + \alpha_{\mathbf{n}}\, \mathbf{q}^{k\mathbf{n}}, \\ B(k) &= \beta_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}^{k\mathbf{N}} + \dots + \beta_{\mathbf{n}}\, \mathbf{q}^{k\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_{\mathbf{N}}$ ($\alpha_{\mathbf{n}}$) und $\beta_{\mathbf{N}}$ ($\beta_{\mathbf{n}}$) der Leitkoeffizient (unterste Koeffizient) von $A(k)$ bzw. $B(k)$ sei.

Da nun $B(k+j)$ ein konstantes Vielfaches von $A(k)$ ist, erhalten wir durch eine Normierung folgende Identität:

$$\frac{1}{\alpha_{\mathbf{N}}} \left(\alpha_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}^{k\mathbf{N}} + \dots + \alpha_{\mathbf{n}}\, \mathbf{q}^{k\mathbf{n}} \right) = \frac{1}{\beta_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}^{j\mathbf{N}}} \left(\beta_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}^{(k+j)\mathbf{N}} + \dots + \beta_{\mathbf{n}}\, \mathbf{q}^{(k+j)\mathbf{n}} \right) \tag{3.5}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von $\mathbf{q}^{\mathbf{n}\,k}$, so erhalten wir die gesuchte notwendige Bedingung für j:

$$\mathbf{q}^{j(\mathbf{N}-\mathbf{n})} = \frac{\alpha_{\mathbf{N}}}{\alpha_{\mathbf{n}}} \frac{\beta_{\mathbf{n}}}{\beta_{\mathbf{N}}}. \tag{3.6}$$

Wollen wir also alle $j \in \mathrm{dispset}_k\big(A(k), B(k)\big)$ bestimmen, so können wir mit Hilfe von Gleichung (3.6) alle möglichen Kandidaten ermitteln: Gilt $\mathbf{N} \neq \mathbf{n}$, so gibt es höchstens ein $j \in \mathbb{N}_0$, welches Gleichung (3.6) erfüllt; dieses j ist genau dann ein Element der Dispersionsmenge, wenn Gleichung (3.5) gilt.

Gilt andererseits $\mathbf{N} = \mathbf{n}$, so sind $A(k)$ und $B(k)$ Monome und jedes $j \in \mathbb{N}_0$ ist offensichtlich eine Lösung von Gleichung (3.6). □

Hier taucht der erste Unterschied im Gegensatz zum Gosper-Algorithmus (hypergeometrischer Fall) auf: Dort erfolgt die Berechnung der Dispersionsmenge stets über $\mathbb{K}[k]$ und enthält genau ein oder kein Element. Lemma 3.6 zeigt nun, daß dies im $\mathbf{q}$-Fall bzw. bei der Berechnung über $\mathbb{F}\big[q^k\big]$ im wesentlichen ähnlich ist. Lediglich Monomfaktoren stellen ein gewisses Problem dar, was man bei Dispersionsberechnungen im $\mathbf{q}$-Fall stets im Hinterkopf haben sollte.

Um nun die Dispersion zweier Polynome zu bestimmen, können wir diese als Produkt irreduzibler Faktoren schreiben und anschließend auf alle möglichen Kombinationen dieser Faktoren den Algorithmus prime-q-disp anwenden.

Algorithmus 3.3 Dispersionsmenge

Input: $(Q(k), R(k)) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\right]^2$.
Output: $\mathrm{dispset}_k\big(Q(k), R(k)\big)$.

$\prod_{i=1}^{l} Q_i(k)^{\mu_i} := Q(k)$, wobei $Q_i(k) \neq Q_j(k)$ für $i \neq j$ und $Q_i(k)$ irreduzibel, $\mu_i \in \mathbb{N}$;

$\prod_{i=1}^{n} R_i(k)^{\nu_i} := R(k)$, wobei $R_i(k) \neq R_j(k)$ für $i \neq j$ und $R_i(k)$ irreduzibel, $\nu_i \in \mathbb{N}$;

$\mathcal{J} := \{\}$;
for $i := 1$ **to** l **do**
  for $j := 1$ **to** n **do**
    $\mathcal{J} := \mathcal{J} \cup \big\{\text{prime-}q\text{-disp}\big(Q_i(k), R_j(k)\big)\big\}$;
  end for
end for
if $(\infty \in \mathcal{J})$ **then**
  return $\mathbb{N}_0$;
else
  return $\mathcal{J} \setminus \{-\infty\}$;
end if

Die Berechnung der Dispersionsmenge mittels Algorithmus 3.3 ist bisher die schnellste Methode, sofern ein effizienter Faktorisierungsalgorithmus vorliegt. Eine Alternative wäre ansonsten die Berechnung der Dispersionsmenge mittels Resultanten (siehe auch [Koe98]).

3.2 q-Gosper-Darstellung

Folgendes Lemma zeigt nun, daß die spezielle Darstellung von $F(k+1)/F(k)$ im **q**-Gosper-Algorithmus 3.1 stets möglich ist:

Lemma 3.7 *Sei $L(k) \in \mathbb{F}\left(q_1{}^k, \ldots, q_m{}^k\right) \setminus \{0\}$ gegeben. Dann existieren Polynome $P(k)$,$Q(k)$ und $R(k)$ in $\mathbb{F}\left[q_1{}^k, \ldots, q_m{}^k\right]$ mit:*

(**q**GR1) $\quad L(k) = \dfrac{P(k+1)}{P(k)} \dfrac{Q(k)}{R(k)},$

(**q**GR2) $\quad \gcd\big(Q(k), R(k+j)\big) = 1,$ *für alle* $j \in \mathbb{N}_0$,

(**q**GR3) $\quad \gcd\big(Q(k), P(k)\big) = 1,$

(**q**GR4) $\quad \gcd\big(R(k), P(k+1)\big) = 1,$

(**q**GR5) $\quad P(k)$ *und* $R(k)$ *sind monisch und* $\gcd\big(P(k), q_i{}^k\big) = 1$, *für* $i = 1, \ldots, m$,

(**q**GR6) $\quad \operatorname{multideg}(P(k)) = \mathbf{0}$.

Gelten die Eigenschaften (**q**GR1) *und* (**q**GR2) *(*(**q**GR1)–(**q**GR6)*), so nennen wir das Tripel* $(P(k), Q(k), R(k))$ *eine (kanonische)* **q**-*Gosper-Darstellung von* $L(k)$ *bzgl.* k.

Um das Lemma zu beweisen, wollen wir einen Algorithmus angeben, mit dessen Hilfe man eine (kanonische) **q**-Gosper-Darstellung berechnen kann:

Algorithmus 3.4 Berechnung einer (kanonischen) **q**-Gosper-Darstellung

Input: $(A(k), B(k)) \in \mathbb{F}\left[q_1{}^k, \ldots, q_m{}^k\right]^2$, $\prec$ eine lineare Ordnung auf $\mathbb{N}_0$.
Output: $(P(k), Q(k), R(k)) \in \mathbb{F}\left[q_1{}^k, \ldots, q_m{}^k\right]^3$, **q**-Gosper-Darstellung von $A(k)/B(k)$.

$Q_0(k) := A(k)/\gcd\big(A(k), B(k)\big)$;
$R_0(k) := B(k)/\gcd\big(A(k), B(k)\big)$;
$\{l_1, l_2, \ldots, l_d\} := \big\{l \in \mathbb{N}_0 \mid \gcd\big(Q_0(k), R_0(k+l)\big) \neq 1\big\}$, wobei $l_1 \prec l_2 \prec \cdots \prec l_d$;
for $i := 1$ **to** d **do**
  $P_i(k) := \gcd(Q_{i-1}(k), R_{i-1}(k+l_i))$;
  $Q_i(k) := Q_{i-1}(k)/P_i(k)$;
  $R_i(k) := R_{i-1}(k)/P_i(k-l_i)$;
end for
$P(k) := \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{l_i} P_i(k-j)$;
return $(P(k), Q_d(k), R_d(k))$;

Beweis: Sei $L(k) = A(k)/B(k) \in \mathbb{F}\left(q_1{}^k, \ldots, q_m{}^k\right) \setminus \{0\}$ mit $A(k), B(k) \in \mathbb{F}\left[q_1{}^k, \ldots, q_m{}^k\right]$ gegeben. Dann wenden wir Algorithmus 3.4 auf $(A(k), B(k))$ mit der normalen Ordnung „$<$" an. Nach Definition besitzen $Q_0(n)$ und $R_0(n)$ keine gemeinsamen Monomfaktoren, so daß die Dispersionsmenge endlich sein muß, d. h. $d < \infty$. Zudem gilt (**q**GR1), da:

$$\begin{aligned}\frac{P(k+1)}{P(k)}\ \frac{Q_d(k)}{R_d(n)} &= \frac{Q_d(k)}{R_d(k)} \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{l_i} \frac{P_i(k+1-j)}{P_i(k-j)} \\ &= \frac{Q_0(k)}{\prod_{i=1}^d P_i(k)}\ \frac{\prod_{i=1}^d P_i(k-l_i)}{R_0(k)} \prod_{i=1}^{d} \frac{P_i(k)}{P_i(k-l_i)} \\ &= \frac{Q_0(k)}{R_0(k)}.\end{aligned}$$

Bevor wir nun die restlichen Aussagen beweisen, setzen wir $l_{d+1} := \infty$ und zeigen folgende Hilfsaussage:

$$\text{Für } h,i,j,l \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \le h \le i,j \le d \text{ und } l < l_{h+1} \text{ gilt } \gcd(Q_i(k), R_j(k+l)) = 1. \tag{3.7}$$

Falls $l \notin \{l_1, l_2, \ldots, l_d\}$ ist dies klar, da $Q_i(k)$ und $R_j(k)$ ein Teiler von $Q_0(k)$ bzw. $R_0(k)$ ist.
Für $l_h \in \{l_1, l_2, \ldots, l_d\}$ wollen wir die Behauptung durch Induktion nach h beweisen:
$\underline{h = 0:}$ Dieser Fall ist klar, da kein $l \in \{l_1, l_2, \ldots, l_d\}$ mit $l < l_1$ existiert.
$\underline{h > 0:}$ Angenommen, die Behauptung gilt für alle $l < l_h$, so ist sie nur noch für $l = l_h$ nachzuweisen. Aufgrund der Definition von $Q_i(n)$ und $R_i(n)$ folgt

$$\gcd(Q_i(k), R_j(k+l_h)) \;\Big|\; \gcd(Q_h(k), R_h(k+l_h)) = \gcd\left(\frac{Q_{h-1}(k)}{P_h(k)}, \frac{R_{h-1}(k+l_h)}{P_h(k)}\right) = 1$$

nach Definition von $P_h(k)$, womit die Behauptung (3.7) bewiesen ist.

(**q**GR2) Aufgrund von (3.7) folgt $\gcd(Q_d(k), R_d(k+l)) = 1$ für alle $l < l_{d+1} = \infty$.

(**q**GR3) Angenommen $Q_d(k)$ und $P(k)$ hätten einen gemeinsamen Faktor. Das hieße, es gäbe $i,j \in \mathbb{N}$ mit $1 \le i \le d$ und $1 \le j \le l_i$, so daß $\gcd(Q_d(k), P_i(k-j)) \ne 1$. Wegen

$$R_{i-1}(k+l_i-j) = R_i(k+l_i-j)\, P_i(k-j)$$

wäre $P_i(k-j)$ aber auch ein Teiler von $R_{i-1}(k+l_i-j)$, was aufgrund von $l_i - j < l_i$ ein Widerspruch zu (3.7) ist.

(**q**GR4) Haben $R_d(k)$ und $P(k+1)$ einen gemeinsamen Faktor, so gibt es ein $P_i(k-j)$ mit $1 \le i \le d$ und $1 \le j+1 \le l_i$, das $R_d(k)$ teilt. Wegen

$$Q_{i-1}(k-j) = Q_i(k-j)\, P_i(k-j),$$

folgt dann, daß $Q_{i-1}(k)$ und $R_d(k+j)$ einen gemeinsamen Faktor besitzen – ein Widerspruch zu (3.7), da $j < l_i$.

(**q**GR5) Offenbar können wir $P(k)$ und $R(k)$ normieren, indem wir diese Faktoren in $Q(k)$ integrieren. Zudem besitzt $P(k)$ nach Definition keine Monomfaktoren.

(**q**GR6) Angenommen, $\operatorname{multildeg}(P(k)) \ne \mathbf{0}$. Dann ist für ein $l \in \{1, \ldots, m\}$ das Monom ${q_l}^k$ ein Teiler von $P(k)$. Nach Definition von $P(k)$ ist also ein $P_i(k-j)$, $i,j \in \mathbb{N}$ mit $1 \le i \le d$ und $1 \le j \le l_i$, ein Vielfaches von ${q_l}^k$. Da aber ${q_l}^{k+h}$ für alle $h \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von $P_i(k)$ ist, haben wir somit einen nichttrivialen Teiler von $Q_0(k)$ und $R_0(k+l_i)$ gefunden[12] – ein Widerspruch zu deren Definition.

[12] $P_i(k) = \gcd\big(Q_{i-1}(k), R_{i-1}(k+l_i)\big)$.

□

Bevor wir die Definition der *kanonischen* **q**-Gosper-Darstellung rechtfertigen, d. h. deren Eindeutigkeit zeigen, wollen wir zunächst ein Beispiel betrachten:

Beispiel 3.8: Setze $F(k) = q^k\big(q^k+1\big)\,\big(q^k+q^2\big)^2$. Wenden wir nun den Algorithmus 3.4 auf $(F(k+1), F(k))$ an, so erhalten wir die Dispersionsmenge $\{1,3\}$. Wählen wir als Ordnung „$<$" (also $l_1 = 1, l_2 = 3$), so bekommen wir die q-Gosper-Darstellung

$$\Big(\big(q^k+q\big)\,\big(q^k+q^3\big)^2,\ q,\ 1\Big),$$

wohingegen die Ordnung „$>$" (also $l_1 = 3, l_2 = 1$) zu der Darstellung

$$\Big(\big(q^k+q\big)\,\big(q^k+q^2\big)\,\big(q^k+q^3\big)^2,\ q^k+q^2,\ q^k+q\Big)$$

führt. ♢

Die zusätzlichen Eigenschaften der *kanonischen* **q**-Gosper-Darstellung erzwingen nun insbesondere auch eine Minimalität des Polynoms $P(k)$, mit deren Hilfe wir die Eindeutigkeit dieser kanonischen Darstellung zeigen können.

Lemma 3.9 *Seien* $P(k), Q(k), R(k), \tilde{P}(k), \tilde{Q}(k), \tilde{R}(k) \in \mathbb{F}\big[{q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\big]$, *wobei* $P(k)$ *monomteilerfrei sei und*

$$\gcd\big(Q(k), P(k)\big) \;=\; 1 \;=\; \gcd\big(R(k), P(k+1)\big)$$

Gilt nun für alle $j \in \mathbb{N}_0$ *noch* $\gcd\big(\tilde{Q}(k), \tilde{R}(k+j)\big) = 1$ *und*

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}\,\frac{Q(k)}{R(k)} \;=\; \frac{\tilde{P}(k+1)}{\tilde{P}(k)}\,\frac{\tilde{Q}(k)}{\tilde{R}(k)}, \tag{3.8}$$

so ist $P(k)$ *ein Teiler von* $\tilde{P}(k)$.

Beweis: Seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Setze ferner

$$T(k) := \gcd\big(P(k), \tilde{P}(k)\big), \quad p(k) := P(k)/T(k), \quad \text{und} \quad \tilde{p}(k) := \tilde{P}(k)/T(k).$$

Multiplizieren wir Gleichung (3.8) mit $P(k)\,\tilde{P}(k)\,R(k)\,\tilde{R}(k)/(T(k)\,T(k+1))$, so erhalten wir

$$p(k+1)\,Q(k)\,\tilde{p}(k)\,\tilde{R}(k) \;=\; \tilde{p}(k+1)\,\tilde{Q}(k)\,p(k)\,R(k). \tag{3.9}$$

Nach Definition bzw. Voraussetzung ist $p(k)$ relativ prim zu $Q(k)$ sowie $\tilde{p}(k)$, womit wir aus Gleichung (3.9) schließen

$$p(k) \quad \text{teilt} \quad \tilde{R}(k)\,p(k+1).$$

Analog folgern wir, daß $p(k+1)$ ein Teiler von $\tilde{Q}(k)\,p(k)$ ist. Per Induktion erhalten wir so für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} p(k) \quad &\text{teilt} \quad \tilde{R}(k)\,\tilde{R}(k+1)\cdots\tilde{R}(k+n-1)\,p(k+n),\\ p(k) \quad &\text{teilt} \quad \tilde{Q}(k-1)\,\tilde{Q}(k-2)\cdots\tilde{Q}(k-n)\,p(k-n). \end{aligned}$$

Da nun $P(k)$ nach Voraussetzung monomteilerfrei ist, muß für genügend große n stets

$$\gcd\big(p(k), p(k+n)\big) \;=\; 1 \;=\; \gcd\big(p(k), p(k-n)\big)$$

gelten. Zudem sind für alle $j \in \mathbb{N}_0$ $\tilde{Q}(k)$ und $\tilde{R}(k+j)$ teilerfremd, so daß also $p(k)$ konstant sein muß. Entsprechend der Definition von $p(k)$ impliziert dies, daß $P(k)$ ein Teiler von $\tilde{P}(k)$ ist. □

Korrolar 3.10 *Zu jeder Funktion $L(k) \in \mathbb{F}\left({q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\right)$ gibt es genau eine kanonische* **q**-*Gosper-Darstellung.*

Beweis: Sei $L(k) \in \mathbb{F}\left({q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\right)$ sowie $\big(P(k), Q(k), R(k)\big)$ und $\big(\tilde{P}(k), \tilde{Q}(k), \tilde{R}(k)\big)$ zwei kanonische **q**-Gosper-Darstellungen von $L(k)$:

$$L(k) \;=\; \frac{P(k+1)}{P(k)}\,\frac{Q(k)}{R(k)} \;=\; \frac{\tilde{P}(k+1)}{\tilde{P}(k)}\,\frac{\tilde{Q}(k)}{\tilde{R}(k)}.$$

Nach Lemma 3.9 ist $P(k)$ ein Teiler von $\tilde{P}(k)$ sowie $\tilde{P}(k)$ ein Teiler von $P(k)$. Da nun $P(k)$ und $\tilde{P}(k)$ monisch sind, gilt $P(k) = \tilde{P}(k)$. Demzufolge ist $Q(k)\,\tilde{R}(k) = \tilde{Q}(k)\,R(k)$, und wir schließen mit (**q**GR2) und (**q**GR5) $R(k) = \tilde{R}(k)$, was letztendlich $Q(k) = \tilde{Q}(k)$ impliziert. □

3.3 Existenz einer Stammfunktion

Mit Hilfe der **q**-Gosper Darstellung können wir das Problem der Bestimmung einer diskreten Stammfunktion auf das Ermitteln einer endlichen Laurentpolynomlösung einer inhomogenen Rekursion 1. Ordnung mit Polynomkoeffizienten reduzieren.

Lemma und Definition 3.11 *Sei $F(k)$ ein* **q**-*hypergeometrischer Term bzgl. k. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert ein **q**-*hypergeometrischer Term $G(k)$ bzgl. k mit*

$$F(k) \;=\; G(k+1) \;-\; G(k).$$

(ii) Es gibt ein endliches Laurentpolynom $X(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \ldots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$ und eine **q**-*Gosper-Darstellung $\big(P(k), Q(k), R(k)\big)$ von $F(k+1)/F(k)$, für die gilt:*

$$G(k) = \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k), \tag{3.10}$$

$$P(k) \;=\; Q(k)\,X(k) \;-\; R(k-1)\,X(k-1). \tag{3.11}$$

Ist $\big(P(k), Q(k), R(k)\big)$ sogar eine kanonische **q**-*Gosper-Darstellung, so nennen wir $G(k)$ eine kanonische Stammfunktion von $F(k)$.*

Beweis: Sei also $F(k)$ ein $\mathbf{q}$-hypergeometrischer Term bzgl. k.
„*(ii)⇒(i)*": Seien $P(k)$, $Q(k)$, $R(k)$ und $X(k)$ gemäß (ii) gegeben. Definieren wir nun $G(k)$ via (3.10), so ist $G(k)$ $\mathbf{q}$-hypergeometrisch bzgl. k, und es gilt:

$$\begin{aligned}
G(k+1)-G(k) &\overset{(3.10)}{=} \frac{R(k)\,X(k)}{P(k+1)}\,F(k+1) - \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k) \\
&= \left(\frac{R(k)\,X(k)}{P(k+1)}\,\frac{P(k+1)}{P(k)}\,\frac{Q(k)}{R(k)} - \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\right)F(k) \\
&= \big(Q(k)\,X(k) - R(k-1)\,X(k-1)\big)\,\frac{F(k)}{P(k)} \\
&\overset{(3.11)}{=} F(k)
\end{aligned}$$

„*(i)⇒(ii)*": Sei $G(k)$ entsprechend (i) gegeben und $\big(P(k),Q(k),R(k)\big)$ eine $\mathbf{q}$-Gosper Darstellung von $F(k+1)/F(k)$. Definieren wir nun

$$X(k) := \frac{P(k+1)}{R(k)}\,\frac{G(k+1)}{F(k+1)},$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{R(k)\,X(k)}{P(k+1)}\,F(k+1) - \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k) \\
\Longleftrightarrow\quad 1 &= \frac{R(k)\,X(k)}{P(k+1)}\,\frac{P(k+1)}{P(k)}\,\frac{Q(k)}{R(k)} - \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)} \\
\Longleftrightarrow\quad P(k) &= Q(k)\,X(k) - R(k-1)\,X(k-1).
\end{aligned}$$

Gemäß der Definition von $X(k)$ gilt also Gleichung (3.10) und – wie eben gezeigt – auch (3.11). Ferner ist wegen (i) $G(k)/F(k) \in \mathbb{F}\big({q_1}^k,\ldots,{q_m}^k\big)$, somit auch $X(k) \in \mathbb{F}\big({q_1}^k,\ldots,{q_m}^k\big)$. Also müssen wir nur noch beweisen, daß sogar $X(k) \in \mathbb{F}\big[{q_1}^k,{q_1}^{-k},\ldots,{q_m}^k,{q_m}^{-k}\big]$ gilt.

Sei also $N(k)/D(k) := X(k)$ mit $N(k),\ D(k) \in \mathbb{F}\big[{q_1}^k,\ldots,{q_m}^k\big]$ eine reduzierte Darstellung von $X(k)$. Angenommen, $D(k) \not\equiv 1$ ($\mathbf{q}$-mod ${q_1}^k,\ldots,{q_m}^k$). Dann folgt insbesondere

$$j := \mathbf{q}\text{-disp}_k\big(D(k),D(k)\big) \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und} \qquad T(k) := \mathbf{q}\text{-gcd}\big(D(k),D(k+j)\big) \neq 1.$$

Da nun $T(k)$ nach Definition keine Monomfaktoren enthält, erhalten wir aufgrund der Eigenschaften der Dispersion folgende beiden Gleichungen[13]:

$$\gcd(D(k-1),T(k)) = 1 \qquad \text{und} \qquad \gcd(T(k-j-1),D(k)) = 1. \tag{3.12}$$

Multiplizieren wir nun die Rekursionsgleichung (3.11) mit $D(k)\,D(k-1)/T(k)$, so erhalten wir:

$$\underbrace{\frac{P(k)\,D(k)\,D(k-1)}{T(k)}}_{\substack{\in\mathbb{F}[{q_1}^k,\ldots,{q_m}^k]\text{nach}\\ \text{Def. von } T(k)}} = \frac{Q(k)\,N(k)\,D(k-1)}{T(k)} - \underbrace{\frac{R(k-1)\,N(k-1)\,D(k)}{T(k)}}_{\substack{\in\mathbb{F}[{q_1}^k,\ldots,{q_m}^k]\text{nach}\\ \text{Def. von } T(k)}}.$$

[13]Würde $T(k)$ auch Monomfaktoren enthalten, so gälte $\gcd(T(k),T(k+j)) \neq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und die folgende Argumentation wäre nicht anwendbar. D. h. an dieser Stelle wird deutlich, warum $X(k)$ nicht notwendigerweise ein *Polynom* sein muß.

Also muß bereits $Q(k)\,N(k)\,D(k-1)/T(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k,\dots,{q_m}^k\right]$ sein. Nach Definition sind jedoch $T(k)$ und $N(k)$ teilerfremd, sowie wegen Gleichung (3.12) auch $T(k)$ und $D(k-1)$, d. h. $T(k)$ ist ein Teiler von $Q(k)$.

Analog erhalten wir durch Multiplikation mit $D(k)\,D(k-1)/T(k-j-1)$ aus Gleichung (3.11):

$$\underbrace{\frac{P(k)\,D(k)\,D(k-1)}{T(k-j-1)}}_{\substack{\in\mathbb{F}\left[{q_1}^k,\dots,{q_m}^k\right]\text{nach}\\ \text{Def. von } T(k-j-1)}} = \underbrace{\frac{Q(k)\,N(k)\,D(k-1)}{T(k-j-1)}}_{\substack{\in\mathbb{F}\left[{q_1}^k,\dots,{q_m}^k\right]\text{nach}\\ \text{Def. von } T(k-j-1)}} - \frac{R(k-1)\,N(k-1)\,D(k)}{T(k-j-1)}$$

Entsprechend Gleichung (3.12) ist $T(k-j-1)$ teilerfremd zu $D(k)$, jedoch ein Teiler von $D(k-1)$, also teilerfremd zu $N(k-1)$. Somit ist also $T(k)$ ein Teiler von $R(k+j)$.

D. h. mit $T(k)$ haben wir einen nichttrivialen Teiler von $Q(k)$ und $R(k+j)$ gefunden – ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\big(P(k),Q(k),R(k)\big)$ eine $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellung ist. Also gilt $D(k)\equiv 1$ ($\mathbf{q}$-mod ${q_1}^k,\dots,{q_m}^k$) und damit $X(k)\in\mathbb{F}\left[{q_1}^k,{q_1}^{-k},\dots,{q_m}^k,{q_m}^{-k}\right]$. □

Bei der Definition einer diskreten Stammfunktion haben wir recht willkürlich die *aufwärtsgerichtete* Stammfunktion gewählt. Man kann die gesamte Theorie jedoch auch auf dem *abwärtsgerichteten* Operator ∇_k, $\nabla_k F(k) := F(k) - F(k-1)$ aufbauen.

Hat man jedoch entsprechend Lemma 3.11 eine aufwärtsgerichtete Stammfunktion ermittelt, so gilt:

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{R(k)\,X(k)}{P(k+1)}\,F(k+1) - \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k)\\
&= \frac{R(k)\,X(k)}{P(k+1)}\,\frac{P(k+1)\,Q(k)}{P(k)\,R(k)}\,F(k) - \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,\frac{P(k)\,Q(k-1)}{P(k-1)\,R(k-1)}\,F(k-1)\\
&= \frac{Q(k)\,X(k)}{P(k)}\,F(k) - \frac{Q(k-1)\,X(k-1)}{P(k-1)}\,F(k-1).
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Der $\mathbf{q}$-hypergeometrische Term

$$G(k) = \frac{Q(k)\,X(k)}{P(k)}\,F(k) \tag{3.13}$$

ist eine abwärtsgerichtete Stammfunktion zu $F(k)$.

3.4 Lösen der inhomogenen Rekursionsgleichung für $X(k)$

Um nun $X(k)$ zu bestimmen, geht man in zwei Schritten vor:

1. Berechnung einer unteren und oberen Gradschranke für $X(k)$,

2. Bestimmung aller Polynomlösungen, deren Grad innerhalb der berechneten Gradschranken liegt.

Bevor wir für den multidimensionalen Fall eine Gradschranke angeben, wollen wir zunächst den eindimensionalen Fall betrachten.

Bemerkung 3.12: Sei $X(k) \in \mathbb{F}[q^k, q^{-k}]$ mit $X(k) = \sum_{i=l}^{L} c_i (q^k)^i$. Dann gilt für $j \in \mathbb{Z}$:

$$X(k+j) \;=\; \sum_{i=l}^{L} c_i \left(q^{k+j}\right)^i \;=\; \sum_{i=l}^{L} c_i\, q^{ij} \left(q^k\right)^i.$$

D. h. ein Shift von $k \to k+j$ ändert weder den Grad noch den unteren Grad von $X(k)$. Die Transformation $k \to -k$ liefert

$$X(-k) = \sum_{i=l}^{L} c_i \left(q^{-k}\right)^i = \sum_{i=l}^{L} c_i \left(q^k\right)^{-i} = \sum_{i=-L}^{-l} c_{-i} \left(q^k\right)^i,$$

womit sich folgende Identitäten ergeben:

$$\deg_{q^k}(X(-k)) = -\mathrm{ldeg}_{q^k}(X(k)) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{ldeg}_{q^k}(X(-k)) = -\deg_{q^k}(X(k))\,.$$

Mittels dieser Gleichungen sieht man sofort, daß die Möglichkeit der Berechnung einer oberen Gradschranke auch sofort mittels der Transformation $k \to -k$ die Bestimmung einer unteren erlaubt. ◁

Lemma 3.13 (Gradschranke für $X(k)$) *Seien $P(k)$, $Q(k)$, $R(k)$ und $X(k) \in \mathbb{F}[q^k, q^{-k}]$ mit*

$$Q(k) = \sum_{i=m}^{M} d_i \left(q^k\right)^i, d_m \neq 0 \neq d_M \quad \text{und} \quad R(k) = \sum_{i=n}^{N} e_i \left(q^k\right)^i, e_n \neq 0 \neq e_N.$$

Erfüllt nun $X(k)$ die inhomogene Rekursionsgleichung erster Ordnung

$$P(k) \;=\; Q(k)\,X(k) \;-\; R(k-1)\,X(k-1), \tag{3.14}$$

so gelten folgende Gradbedingungen für $X(k)$:

I. (α) *Falls $m \neq n$ gilt:* $\mathrm{ldeg}_{q^k}(X(k)) = \mathrm{ldeg}_{q^k}(P(k)) - \min\{m, n\}$
   (β) *Falls $m = n$ setze $z := \log_q \left(e_n/d_n\right)$.*
      (β_1) *Falls $z \notin \mathbb{Z}$ gilt:* $\mathrm{ldeg}_{q^k}(X(k)) = \mathrm{ldeg}_{q^k}(P(k)) - n$
      (β_2) *Falls $z \in \mathbb{Z}$ gilt:* $\mathrm{ldeg}_{q^k}(X(k)) \in \left\{z - n,\, \mathrm{ldeg}_{q^k}(P(k)) - n\right\}$

II. (α) *Falls $M \neq N$ gilt:* $\deg_{q^k}(X(k)) = \deg_{q^k}(P(k)) - \max\{M, N\}$
   (β) *Falls $M = N$ setze $z := \log_q \left(e_N/d_N\right)$.*
      (β_1) *Falls $z \notin \mathbb{Z}$ gilt:* $\deg_{q^k}(X(k)) = \deg_{q^k}(P(k)) - N$
      (β_2) *Falls $z \in \mathbb{Z}$ gilt:* $\deg_{q^k}(X(k)) \in \left\{z - N,\, \deg_{q^k}(P(k)) - N\right\}$

Beweis: Aufgrund der Bemerkung sind die Fälle I.(α) und II.(α) klar, da sich der Grad der Polynome bei Shiften um eins nicht ändert und somit falls $\mathrm{ldeg}_{q^k}(Q(k)) \neq \mathrm{ldeg}_{q^k}(R(k))$ bzw. $\deg_{q^k}(Q(k)) \neq \deg_{q^k}(R(k))$ entweder der erste oder der zweite Summand der rechten Seite von Gleichung (3.14) die kleinste bzw. höchste Potenz von q^k liefert.

Gelte von nun an $\mathrm{ldeg}_{q^k}(Q(k)) = \mathrm{ldeg}_{q^k}(R(k))$. Definiere $X(k) =: \sum_{i=l}^{L} c_i\, K^i$, $c_l \neq 0 \neq c_L$, $K := q^k$. Dann folgt

$$X(k-1) = \sum_{i=l}^{L} c_i\, q^{-i}\, K^i \quad \text{und} \quad R(k-1) = \sum_{i=n}^{N} e_i\, q^{-i}\, K^i.$$

Zunächst wollen wir Punkt I zeigen, wobei „$\cdots$“ eine Abkürzung für eine Summe von Termen höherer Ordnung als die explizit erwähnten sei. Dann gilt für Gleichung (3.14):

$$\begin{aligned} P(k) &= \left(d_n\, K^n + \cdots\right)\left(c_l\, K^l + \cdots\right) - \left(e_n\, q^{-n}\, K^n + \cdots\right)\left(c_l\, q^{-l}\, K^l + \cdots\right) \\ &= c_l\left(d_n - e_n q^{-l-n}\right) K^{n+l} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{coeff}\Big(P(k), K^{n+l}\Big) = 0 \quad &\overset{c_l \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad d_n = e_n\, q^{-l-n} \\ &\Longrightarrow \quad q^{n+l} = e_n/d_n \\ &\Longrightarrow \quad l = \log_q(e_n/d_n) - n. \end{aligned}$$

Gilt $\left(\log_q(e_n/d_n) - n\right) \notin \mathbb{Z}$, so ist dies äquivalent zu $\log_q(e_n/d_n) \notin \mathbb{Z}$, und damit folgt Fall I.(β_1). Ansonsten könnte $\operatorname{coeff}\big(P(k), K^{n+l}\big)$ gleich Null sein, was I.(β_2) impliziert.

Sei nun $\deg_{q^k}(Q(k)) = \deg_{q^k}(R(k))$ und „$\cdots$“ eine Abkürzung für eine Summe von Termen niedrigerer Ordnung als die explizit erwähnten. Gleichung (3.14) liefert dann:

$$\begin{aligned} P(k) &= \left(d_N\, K^N + \cdots\right)\left(c_L\, K^L + \cdots\right) - \left(e_N\, q^{-N}\, K^N + \cdots\right)\left(c_L\, q^{-L}\, K^L + \cdots\right) \\ &= c_L\left(d_N - e_N\, q^{-L-N}\right) K^{N+L} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{coeff}\big(P(k), K^{N+L}\big) = 0 \quad &\overset{c_L \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad d_N = e_N\, q^{-L-N} \\ &\Longrightarrow \quad L = \log_q(e_N/d_N) - N. \end{aligned}$$

Entsprechend dem Beweis von Punkt I folgen nun die Fälle II.(β_1) und II.(β_2). □

Mit Hilfe der Gradschranke können wir nun einen generischen Ansatz für $X(k)$ machen. Angenommen,

$$\operatorname{ldeg}_{q^k}(X(k)) \geq l \qquad \text{und} \qquad \deg_{q^k}(X(k)) \leq L.$$

Dann setzen wir $X(k) := \sum_{j=l}^{L} c_j \left(q^k\right)^j$, mit noch unbekannten Koeffizienten $c_j, j = l, \ldots, L$. Diesen Ansatz setzen wir in Gleichung (3.11) ein und erhalten so mittels Koeffizientenvergleich die äquivalenten $N+1$ Gleichungen

$$\operatorname{coeff}\Big(Q(k+1)\, X(k) - R(k)\, X(k-1) - P(k),\ \left(q^k\right)^j\Big) \;=\; 0, \quad j = 0, \ldots, N. \tag{3.15}$$

Somit ist die Existenz einer q-hypergeometrischen Stammfunktion $G(k)$ äquivalent zur Existenz einer endlichen Laurentpolynomlösung des linearen Gleichungssystems (3.15).

Diese „direkte Methode“ kann u. U. sehr ineffizient sein. In Kapitel (7.1) wird dieses Problem deshalb noch einmal genauer untersucht.

Nun wollen wir noch das Lemma zur Bestimmung einer Gradschranke für $X(k)$ auf den mehrdimensionalen Fall erweitern.

Lemma 3.14 *Sei* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* $P(k), Q(k), R(k),\ X(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \ldots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$ *mit*

$$Q(k) = \sum_{j=l}^{L} \alpha_j(k)\left({q_1}^k\right)^j, \quad \alpha_l(k) \neq 0 \neq \alpha_L(k),$$

$$R(k) = \sum_{j=n}^{N} \beta_j(k)\left({q_1}^k\right)^j, \quad \beta_n(k) \neq 0 \neq \beta_N(k)$$

und $\prec$ *eine Monomordnung auf* $\mathbb{F}\left[{q_2}^k, {q_2}^{-k}, \ldots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$. *Gilt dann für* $X(k)$ *die inhomogene Rekursionsgleichung erster Ordnung*

$$P(k) \;=\; Q(k)\,F(k) \;-\; R(k-1)\,F(k-1), \tag{3.16}$$

so folgt:

I. (α) *Falls* $l \neq n$ *gilt:* $\operatorname{ldeg}_{q_1^k}(X(k)) = \operatorname{ldeg}_{q_1^k}(P(k)) - \min(l,n)$

(β) *Falls* $l = n$ *setze:* $\mathbf{d}_\alpha := \operatorname{multideg}_\prec\big(\alpha_n(k)\big)$, $\mathbf{d}_\beta := \operatorname{multideg}_\prec\big(\beta_n(k)\big)$, *sowie*

$$\mathcal{L} := \left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \exists\, j_2, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}: \quad z = \log_{q_1}\!\left(\tfrac{\operatorname{lcoeff}(\beta_n(k))}{\operatorname{lcoeff}(\alpha_n(k))}\, {q_2}^{j_2} \cdots {q_m}^{j_m}\right) - n \right\}.$$

(β_1) *Falls* $\mathbf{d}_\alpha \neq \mathbf{d}_\beta$ *oder* $\mathcal{L} = \emptyset$ *gilt:* $\operatorname{ldeg}_{q_1^k}(X(k)) = \operatorname{ldeg}_{q_1^k}(P(k)) - n$

(β_2) *Falls* $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{d}_\beta$ *und* $\mathcal{L} \neq \emptyset$ *gilt:* $\operatorname{ldeg}_{q_1^k}(X(k)) \in \big(\mathcal{L} \cup \{\operatorname{ldeg}_{q_1^k}(P(k)) - n\}\big)$

II. (α) *Falls* $L \neq N$ *gilt:* $\deg_{q_1^k}(X(k)) = \deg_{q_1^k}(P(k)) - \max(L,N)$

(β) *Falls* $L = N$ *setze:* $\mathbf{d}_\alpha := \operatorname{multideg}_\prec\big(\alpha_N(k)\big)$, $\mathbf{d}_\beta := \operatorname{multideg}_\prec\big(\beta_N(k)\big)$, *sowie*

$$\mathcal{D} := \left\{ Z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \exists\, j_2, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}: \quad Z = \log_{q_1}\!\left(\tfrac{\operatorname{lcoeff}(\beta_N(k))}{\operatorname{lcoeff}(\alpha_N(k))}\, {q_2}^{j_2} \cdots {q_m}^{j_m}\right) - N \right\}.$$

(β_1) *Falls* $\mathbf{d}_\alpha \neq \mathbf{d}_\beta$ *oder* $\mathcal{D} = \emptyset$ *gilt:* $\deg_{q_1^k}(X(k)) = \deg_{q_1^k}(P(k)) - N$

(β_2) *Falls* $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{d}_\beta$ *und* $Z \in \mathbb{Z}$ *gilt:* $\deg_{q_1^k}(X(k)) \in \big(\mathcal{D} \cup \{\deg_{q_1^k}(P(k)) - N\}\big)$

Beweis: Entsprechend der Gradschranke für $\mathbf{q} = q$ sind die Fälle I.(α) und II.(α) offensichtlich. Von nun an können wir also $l = n$ und $L = N$ annehmen.

Seien $P(k), Q(k), R(k)$ und $X(k)$ entsprechend den Voraussetzungen des Lemmas definiert, wobei wir diese als Laurentpolynome in ${q_1}^k$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}\left[{q_2}^k, {q_2}^{-k}, \ldots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$ auffassen wollen. Dementsprechend sei

$$X(k) = \sum_{j=z}^{Z} \xi_j(k)\big({q_1}^k\big)^j, \quad \xi_z(k) \neq 0 \neq \xi_Z(k).$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.16) erhalten wir nun eine obere Gradschranke für $X(k)$, wobei „$\cdots$" eine Abkürzung für eine Summe Terme kleinerer Ordnung bzgl. ${q_1}^k$ sei:

$$\begin{aligned} P(k) \;&=\; \Big(\alpha_N(k)\left({q_1}^k\right)^N + \cdots\Big)\Big(\xi_Z(k)\left({q_1}^k\right)^Z + \cdots\Big) \;- \\ &\qquad \Big(\beta_N(k-1)\left({q_1}^{k-1}\right)^N + \cdots\Big)\Big(\xi_Z(k-1)\left({q_1}^{k-1}\right)^Z + \cdots\Big) \\ &=\; \underbrace{\big(\alpha_N(k)\,\xi_Z(k) - \beta_N(k-1)\,\xi_Z(k-1)\,{q_1}^{-N-Z}\big)}_{=:\,A(k)\,\in\,\mathbb{F}\left[{q_2}^k, {q_2}^{-k}, \ldots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]}\left({q_1}^k\right)^{N+Z} + \cdots \end{aligned}$$

Für $A(k) \neq 0$ folgt sofort $\deg_{q_1{}^k}(X(k)) = \deg_{q_1{}^k}(P(k)) - N$. Bleibt also der Fall $A(k) = 0$ zu betrachten.

Dieser Fall kann aber höchstens dann eintreten, wenn $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{d}_\beta$ (entsprechend II.(β)) gilt. Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir durch Betrachtung des führenden Koeffizienten von $A(k)$ bzgl. $\prec$ eine notwendige Bedingung für Z:

$$\operatorname{lcoeff}(\alpha_N(k)) \cdot \operatorname{lcoeff}(\xi_Z(k)) \;=\; \operatorname{lcoeff}(\beta_N(k-1)) \cdot \operatorname{lcoeff}(\xi_Z(k-1)) \cdot q_1{}^{-N-Z}. \tag{3.17}$$

Nun gibt es aber offensichtlich $j_2, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{\operatorname{lcoeff}(\beta_N(k-1))}{\operatorname{lcoeff}(\alpha_N(k))} \frac{\operatorname{lcoeff}(\xi_Z(k-1))}{\operatorname{lcoeff}(\xi_Z(k))} \;=\; q_2{}^{j_2} \cdots q_m{}^{j_m} \frac{\operatorname{lcoeff}(\beta_N(k))}{\operatorname{lcoeff}(\alpha_N(k))},$$

woraus wir mit Gleichung (3.17)

$$Z \;=\; \log_{q_1}\!\left(\frac{\operatorname{lcoeff}(\beta_N(k))}{\operatorname{lcoeff}(\alpha_N(k))}\, q_2{}^{j_2} \cdots q_m{}^{j_m}\right) \;-\; N$$

schließen können. Insgesamt erhalten wir somit die Gradschranken, die unter II.(β) aufgeführt sind. Der Beweis für den unteren Grad geht völlig analog. □

Notabene: Betrachtet man den Beweis des Lemmas, so sieht man, daß sich der Fall $I.(\beta_2)$ noch durch folgende zwei Bedingungen verfeinern ließe:

1. Man könnte die Menge $\mathcal{L}$ noch mit der Menge

   $$\left\{ z \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \exists\, j_2, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}: \quad z = \log_{q_1}\!\left(\tfrac{\operatorname{tcoeff}(\beta_n(k))}{\operatorname{tcoeff}(\alpha_n(k))}\, q_2{}^{j_2} \cdots q_m{}^{j_m}\right) - n \right\}$$

   schneiden,

2. und zudem $\operatorname{multildeg}_\prec(\alpha_n(k)) = \operatorname{multildeg}_\prec(\beta_n(k))$ fordern.

Gelten diese nicht, so kann nur der Fall $I.(\beta_1)$ eintreten. Zudem könnte man im Fall $m > 2$ den untersten bzw. obersten Koeffizienten noch bzgl. verschiedener Monomordnungen auf $\mathbb{F}\left[q_2{}^k, q_2{}^{-k}, \ldots, q_m{}^k, q_m{}^{-k}\right]$ betrachten. Diese Zusätze könnten insbesondere für die Implementierung des **q**-Gosper Algorithmus interessant sein, da sich so u. U. ein *eindeutiger* unterer Grad ergibt, was sich positiv auf die Rechenzeit auswirken kann.

Entsprechende Bedingungen kann man natürlich auch für die obere Gradschranke hinzufügen. ◁

3.5 Wohldefiniertheit der Stammfunktion

Ist $F(k)$ ein **q**-hypergeometrischer Term bzgl. k, so haben wir die Möglichkeit mittels des **q**-Gosper-Algorithmus eine diskrete Stammfunktion $G(k)$ zu bestimmen. Wollen wir diese *algebraische* Stammfunktion zur Bestimmung definiter Summen verwenden, so stellt sich die Frage nach der Wohldefiniertheit von $G(k)$, bzw. ob wir diese eventuell allein durch Anforderungen an $F(k)$ garantieren können.

Hierfür wollen wir den Begriff der *kanonischen diskreten Stammfunktion* einführen:

Definition 3.15 *Sei $F(k)$ ein $\mathbf{q}$-hypergeometrischer Term mit der diskreten Stammfunktion $G(k)$. Gibt es eine kanonische $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellung $\big(P(k), Q(k), R(k)\big)$ von $F(k+1)/F(k)$ und $X(k) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, {q_1}^{-k}, \ldots, {q_m}^k, {q_m}^{-k}\right]$, so daß*

$$G(k) \;=\; \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k), \tag{3.18}$$

so heißt $G(k)$ eine kanonische Stammfunktion und $\big(P(k), Q(k), R(k); X(k)\big)$ die zu $G(k)$ assoziierte Darstellung.

Das Polynom $P(k)$ nennen wir einen Zertifikatsnenner.

Da sich jede Stammfunktion gemäß Gleichung (3.10) darstellen läßt, ist $G(k)$ für alle k wohldefiniert, sofern nur $F(k)$ wohldefiniert und k keine Nullstelle von $P(k)$ ist. D. h. zur Berechnung der Summe $\sum_{k=a}^{b} F(k)$ brauchen wir nur zu testen, ob $\big\{k \in \mathbb{Z} \;\big|\; P(k) = 0,\; a \le k \le b+1\big\} = \emptyset$ gilt und $F(k)$ für alle $k \in [a, b+1]$ wohldefiniert ist, wodurch dann folgt:

$$\sum_{k=a}^{b} F(k) \;=\; G(b+1) - G(a).$$

Oft liegt jedoch folgende Situation vor, in der sich eine Bestimmung der Nullstellen von $P(k)$ erübrigt:

Lemma 3.16 *Sei $F(k)$ ein $\mathbf{q}$-hypergeometrischer Term und $G(k)$ eine kanonische diskrete Stammfunktion von $F(k)$ mit der assoziierten Darstellung $\big(P(k), Q(k), R(k); X(k)\big)$. Ist $\nu \in \mathbb{Z}$ und*

$$F(k) \in \big(\mathbb{F} \setminus \{0\}\big), \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{Z}_{\ge\nu},$$

so gilt $P(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\ge\nu}$ und

$$G(k+1) \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad X(k) \;=\; 0.$$

Beweis: Seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}_{\ge\nu}$

$$0 \;\neq\; \frac{F(k+1)}{F(k)} \;=\; \frac{P(k+1)}{P(k)}\,\frac{Q(k)}{R(k)}.$$

Aufgrund von ($\mathbf{q}$GR2) und ($\mathbf{q}$GR3) bzw. ($\mathbf{q}$GR2) und ($\mathbf{q}$GR4) folgt $Q(k) \neq 0$ bzw. $R(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\ge\nu}$. Angenommen, $\mathcal{Z} := \big\{k \in \mathbb{Z}_{\ge\nu} \;\big|\; P(k) = 0\big\} \neq \emptyset$; setzen wir $k_0 = \max(\mathcal{Z})$, so folgt $P(k_0+1) \neq 0$. Da auch $Q(k_0) \neq 0$ ist, muß dann $F(k+1)/F(k)$ einen Pol an der Stelle $k = k_0$ haben – ein Widerspruch.

Mit Hilfe dieser Aussagen folgt die letzte Behauptung des Lemmas aus (3.10). □

Zur Illustration des $\mathbf{q}$-Gosper Algorithmus wollen wir nun folgendes Beispiel betrachten.

Beispiel 3.17: In [GR90] steht im Anhang (Gleichung (II.34)) folgende Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} F(k) \;=\; \frac{(a\,p;p)_n\,(c\,q;q)_n}{(a\,p/c;p)_n\,(q;q)_n\,c^n}, \tag{3.19}$$

wobei

$$F(k) \;=\; \frac{1-a\,p^k\,q^k}{(1-a)\,c^k}\,\frac{(a;p)_k\,(c;q)_k}{(a\,p/c;p)_k\,(q;q)_k}\,. \tag{3.20}$$

Da $F(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und ungleich Null ist, muß gemäß Lemma 3.16 auch eine Stammfunktion $G(k)$ (falls sie existiert) auf ganz $\mathbb{N}$ wohldefiniert sein.

Wenden wir nun den **q**-Gosper-Algorithmus an, so müssen wir zunächst die kanonische q-Gosper-Darstellung von $F(k+1)/F(k)$ berechnen. Hierfür definieren wir die Polynome $\tilde{Q}(k), \tilde{R}(k) \in \mathbb{F}\left[p^k, q^k\right]$ unter Verwendung der Abkürzungen $x = p^k$ und $y = q^k$ durch

$$\frac{\tilde{Q}(k)}{\tilde{R}(k)} := \frac{F(k+1)}{F(k)} \;=\; \frac{\big(1-a\,p\,q\,x\,y\big)\,\big(1-a\,x\big)\,\big(1-c\,y\big)}{\big(1-q\,y\big)\,\big(1-a\,x\,y\big)\,\big(c-a\,p\,x\big)}\,. \tag{3.21}$$

Offensichtlich gilt $\operatorname{dispset}_k\big(\tilde{Q}(k), \tilde{R}(k)\big) = \{1\}$, so daß also

$$\big(P(k), Q(k), R(k)\big) \;=\; \big((1-a\,x\,y),\; (1-a\,x)\,(1-c\,y),\; (1-q\,y)\,(c-a\,p\,x)\big)$$

die kanonische q-Gosper-Darstellung von $F(k+1)/F(k)$ ist. Entsprechend Gleichung (3.11) suchen wir nun ein $X(k) \in \mathbb{F}\left[p^k, p^{-k}, q^k, q^{-k},\right]$ mit

$$(1-a\,x)\,(1-c\,y)\,X(k) \;-\; (1-y)\,(c-a\,x)\,X(k-1) \;=\; (1-a\,x\,y). \tag{3.22}$$

Hierfür berechnen wir zunächst mittels Lemma 3.14 die Gradbedingungen. Um eine einfache Ablesung der entsprechenden Koeffizienten zu ermöglichen, wollen wir $Q(k)$ und $R(k)$ noch einmal entsprechend aufschreiben:

$$\begin{aligned} Q(k) \;&=\; (a\,c\,y-a)\,x - c\,y + 1 \;&=\; (a\,c\,x - c)\,y - a\,x + 1, \\ R(k) \;&=\; (a\,p\,q\,y - a\,p)\,x - q\,c\,y + c \;&=\; (a\,p\,q\,x - c\,q)\,y - a\,p\,x + c. \end{aligned}$$

Existiert nun eine Lösung $X(k)$ der Rekursionsgleichung (3.22), so erhalten wir folgende Anforderungen:

- Als Gradbedingung bzgl. x erhalten wir:
  - *I.* Hier landen wir offenbar im Fall (β) mit $\mathcal{L} = \{0\}$. Also folgt Fall (β_2) und somit $\operatorname{ldeg}_x(X(k)) = 0$.
  - *II.* Auch hier ist Fall (β) zuständig, wobei allerdings $\mathcal{D} = \emptyset$, wodurch nach (β_1) $\deg_x(X(k)) = 1 - 1 = 0$ folgt.
- Für y ergeben sich folgende Bedingungen:
  - *I.* Der Fall (β) mit $\mathcal{L} = \{0\}$ führt über (β_2) zu $\operatorname{ldeg}_y(X(k)) \in \big(\{0\} \cup \{0-0\}\big)$.
  - *II.* Hier landen wir wieder im Fall (β_1), da $\mathcal{D} = \emptyset$, wodurch $\deg_y(X(k)) = 1 - 1 = 0$ folgt.

Also ist $X(k)$ eine Konstante aus $\mathbb{F}$. Durch Einsetzen eines generischen Ansatzes für $X(k)$ in Gleichung (3.22) erhält man nun die Lösung $X(k) = (1-c)^{-1}$.

Mit Hilfe von Gleichung (3.10) bekommen wir schließlich die gesuchte Stammfunktion $G(k)$ für $F(k)$:

$$
\begin{aligned}
G(k) &= \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k) \\
&= \frac{\left(1-q^k\right)\left(c-a\,p^k\right)}{(1-c)\left(1-a\,p^k\,q^k\right)}\,\frac{1-a\,p^k\,q^k}{(1-a)\,c^k}\,\frac{(a;p)_k\,(c;q)_k}{(q;q)_k\,(a\,p/c;p)_k} \\
&= \frac{(a;p)_k}{1-a}\,\frac{(c;q)_k}{1-c}\,\frac{1-q^k}{(q;q)_k}\,\frac{1-a\,p^k/c}{(a\,p/c;p)_k}\,\frac{c}{c^k} \\
&= \frac{(a\,p;p)_{k-1}\,(c\,q;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}\,(a\,p/c;p)_{k-1}\,c^{k-1}}
\end{aligned}
$$

Mit dieser Darstellung folgt aufgrund von $\sum\limits_{k=0}^{n} F(k) = G(n+1) - G(0)$ sofort Gleichung (3.19).

$\diamondsuit$

4 Greatest Factorial Factorization

Im Gegensatz zur Integration via Rischs Algorithmus hat Gospers diskrete Variante einen entscheidenden Vorteil: Der Algorithmus ist sehr kompakt und gut nachzuvollziehen. Vom theoretischen Standpunkt drängt sich jedoch die Frage auf, ob es eine Herleitung für den Algorithmus gibt. Die spezielle Darstellung rationaler Funktionen (Lemma 3.7) sowie die Definition der Stammfunktion (3.10), auf der Gospers Algorithmus aufbaut, erscheint uns mehr wie eine geniale Eingebung, deren Entstehung wir nicht nachvollziehen können. Gosper selbst schreibt dazu in seiner Originalarbeit [Gos78]:

> Without the support of MACSYMA and its developers, I could not have collected the experiences necessary to provoke the conjectures that led to this algorithm.

Anfang der Neunziger veröffentlichte P. Paule ([Pau95], [PR95]) für den eindimensionalen q-Fall eine mögliche Herleitung, die wir im folgenden nachvollziehen wollen.[14]

Definition 4.1 *Ein Polynom $P(q^k) \in \mathbb{F}[q^k]$ heißt q-monisch, falls $P(0) = 1$ gilt. Den größten gemeinsamen q-monischen Teiler zweier q-monischer Polynome bezeichnen wir mit* $\gcd^*$.

Seien also $F(k)$ und $G(k)$ q-hypergeometrische Terme mit $F(k) = G(k+1) - G(k)$. Definieren wir ferner

$$\frac{Q(k)}{R(k)} := \frac{F(k+1)}{F(k)}, \qquad Q(k), R(k) \in \mathbb{F}[q^k] \text{ relativ prim}$$

und

$$\frac{X(k)}{P(k)} := \frac{G(k)}{F(k)}, \qquad X(k) \in \mathbb{F}[q^k, q^{-k}] \text{ und } P(k) \in \mathbb{F}[q^k] \text{ relativ prim,}$$

wobei $P(k)$ q-monisch sei. Teilen wir nun $F(k) = G(k+1) - G(k)$ durch $F(k)$ so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{X(k+1)}{P(k+1)} \frac{Q(k)}{R(k)} - \frac{X(k)}{P(k)} = 1, \tag{4.1}$$

bzw. nach Multiplikation mit $P(k)\, P(k+1)\, R(k)$

$$P(k)\, Q(k)\, X(k+1) - P(k+1)\, R(k)\, X(k) = P(k)\, P(k+1)\, R(k). \tag{4.2}$$

Würden wir nun $P(k)$ kennen, so könnten wir $X(k)$ entsprechend Gospers Algorithmus mittels eines generischen Ansatzes bestimmen.[15] Aus Gleichung (4.2) erhalten wir jedoch sofort die Teilbarkeitsbedingungen:

$$P(k+1) \quad \text{teilt} \quad P(k)\, Q(k) \qquad \text{bzw.} \qquad P(k) \quad \text{teilt} \quad P(k+1)\, R(k). \tag{4.3}$$

Hieraus können wir nun ein Vielfaches von $P(k)$ bestimmen.

[14] Der Fall $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ wird in [Rie96] beschrieben und läßt sich auch auf $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$, $m \in \mathbb{N}$ beliebig übertragen.

[15] Offenbar genügt es, ein Vielfaches von $P(k)$ zu bestimmen, da diese Faktoren in $X(k)$ kompensiert werden können.

Lemma 4.2 *Seien* $Q(k), R(k)$ *und* $P(k) \in \mathbb{F}\big[q^k\big]$ *mit* $N := \operatorname{disp}_k\big(Q(k-1), R(k)\big)$ *und*

$$P(k) \quad \textit{teile} \quad \gcd_{q^k}\big(P(k-1)\,Q(k-1),\; P(k+1)\,R(k)\big).$$

Ist nun $P(k)$ q*-monisch, dann folgt* $N < \infty$ *und*

$$P(k) \quad \textit{teilt} \quad \gcd_{q^k}\left(\prod_{i=0}^{N} Q(k-1-i),\; \prod_{i=0}^{N} R(k+i)\right).$$

Beweis: Seien $Q(k), R(k), P(k)$ entsprechend den Voraussetzungen des Lemmas. Per Induktion folgt nun aufgrund der Teilbarkeitsrelation für $P(k)$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$P(k) \quad \text{teilt} \quad P(k-1-n) \cdot \prod_{i=0}^{n} Q(k-1-i) \quad \text{und} \quad P(k+1+n) \cdot \prod_{j=0}^{n} R(k+j).$$

Sei $T(k)$ ein irreduzibler Faktor von $P(k)$. Da $P(k)$ q-monisch ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $T(k)$ kein Teiler von $P(k-1-n)$ oder $P(k+1+n)$ ist. Somit existieren aufgrund der Irreduzibilität von $T(k)$ $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $T(k)$ teilt $Q(k-i)$ und $R(k+1+j)$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \gcd_{q^k}\big(Q(k-1-i), R(k+j)\big) \neq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \gcd_{q^k}\big(Q(k-1), R(k+(i+j))\big) \neq 1 \\ &\Longrightarrow \quad i+j \;\leq\; \operatorname{disp}_k\big(Q(k-1), R(k)\big) \\ &\overset{0 \leq i,j}{\Longrightarrow} \quad i, j \in \big\{0, \ldots, \operatorname{disp}_k\big(Q(k-1), R(k)\big)\big\}. \end{aligned}$$

□

Ist nun $P(k)$ bekannt, so erhalten wir u. U. durch eine einfache Rechnung noch einen nichttrivialen Teiler von $X(k)$.[16] Hierfür multiplizieren wir Gleichung (4.1) mit $P(k)$ und erhalten somit die Aussage

$$\frac{P(k)\,Q(k)\,X(k+1)}{P(k+1)\,R(k)} \in \mathbb{F}\Big[q^k, q^{-k}\Big]\,. \tag{4.4}$$

Da nun $X(k+1)$ und $P(k+1)$ relativ prim sind sowie $P(k)$ nach Voraussetzung q-monisch ist, muß $P(k)\,Q(k)/P(k+1) \in \mathbb{F}\big[q^k\big]$ sein, woraus wir mit Gleichung (4.4) schließen:

$$\frac{R(k)}{\gcd_{q^k}\big(P(k)\,Q(k)/P(k+1), R(k)\big)} \quad \text{teilt} \quad X(k).$$

Somit haben wir ein einfaches Verfahren zur Bestimmung q-hypergeometrischer Stammfunktionen gefunden. Leider enthält der so angesetzte Zertifikatsnenner in einigen Fällen überflüssige Faktoren.

Deshalb wollen wir durch eine Umformulierung der Teilbarkeitsbedingung (4.3) unser Verfahren weiter verfeinern. Setzen wir

$$\tilde{P}_i(k) := \frac{P(k+i)}{\gcd_{q^k}\big(P(k), P(k+1)\big)} \in \mathbb{F}\Big[q^k\Big], \quad \text{für } i = 0, 1, \tag{4.5}$$

[16] Mittels Lemma 4.2 läßt sich zumindest ein Vielfaches von $P(k)$ ermitteln, wobei man im folgenden $P(k)$ stets durch dieses Vielfache ersetzen kann.

so erhalten wir

$$\tilde{P}_1(k) \quad \text{teilt} \quad Q(k) \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{P}_0(k) \quad \text{teilt} \quad R(k). \tag{4.6}$$

Somit sind wir mit dem Problem konfrontiert, ob wir irgendwelche strukturelle Aussagen über $\tilde{P}_0(k)$ bzw. $\tilde{P}_1(k)$ machen können, die uns eine Bestimmung von $P(k)$ ermöglichen. Hier drängt sich der Vergleich zum Risch-Algorithmus auf, in dem die quadratfreie Faktorisierung von Polynomen eine wichtige Rolle spielt. Das entsprechende Analogon zum Shiftoperator ist dort der Differentialoperator, und es gilt:

Bemerkung 4.3: Ist $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ monisch und $\prod_{i=1}^{n} p_i(x)^i$ die quadratfreie Faktorisierung von $p(x)$ so gilt (siehe [GCL92])

$$\gcd_x\big(p(x),\, p'(x)\big) \;=\; \prod_{i=1}^{n} p_i(x)^{i-1}. \qquad \triangleleft$$

Die Lösung des Problems der Bestimmung von $\tilde{P}_i(k)$ liegt nun in der Darstellung der Polynome auf der Basis von steigenden Faktoriellen[17]:

Definition 4.4 *Für $i \in \mathbb{N}_0$ ist die i-te steigende Faktorielle von $P(k)$ definiert als*

$$\big[P(k)\big]_k^{\overline{i}} := \prod_{j=0}^{i-1} P(k+j).$$

Für das leere Produkt setze $\big[P(k)\big]_k^{\overline{0}} := 1$.

Will man nun z. B. die qPochhammer-Funktion durch diese ausdrücken, so erhält man

$$\Big(a\,q^k; q\Big)_n \;=\; \prod_{j=0}^{n-1}\big(1-a\,q^{k+j}\big) \;=\; \big[1-a\,q^k\big]_k^{\overline{n}}.$$

Die Darstellung von Polynomen aus $\mathbb{F}\big[q^k\big]$ als Produkt steigender Faktorieller ist nun im allgemeinen nicht eindeutig:

Beispiel 4.5: Ist

$$P(k) = \big(1-a\,q^k\big)\,\big(1-a\,q^{k+1}\big)^2\,\big(1-a\,q^{k+2}\big)^2\,\big(1-a\,q^{k+3}\big)\,\big(1-a\,q^{k+4}\big)\,\big(1-a\,q^{k+5}\big),$$

so gilt

$$\begin{aligned}
P(k) &= \big[1-a\,q^k\big]_k^{\overline{3}}\,\big[1-a\,q^{k+1}\big]_k^{\overline{5}}\\
&= \big[1-a\,q^k\big]_k^{\overline{1}}\,\big[\big(1-a\,q^{k+1}\big)^2\big]_k^{\overline{2}}\,\big[1-a\,q^{k+3}\big]_k^{\overline{3}}\\
&= \big[1-a\,q^k\big]_k^{\overline{2}}\,\big[1-a\,q^{k+1}\big]_k^{\overline{6}}\,.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

[17] P. Paule verwendet in seiner Arbeit [PR95] fallende Faktorielle, um weitestgehend konform mit der in [Pau95] veröffentlichten Theorie zu bleiben. Hierzu bemerkt er allerdings, daß im q-Fall aufgrund der Definition der qPochhammer-Funktion die steigenden Faktoriellen eine natürlichere Wahl wären.

Unter all diesen Darstellungen gibt es jedoch eine ausgezeichnete, nämlich jene, welche möglichst lange „Ketten“ erzeugt:[18]

Definition 4.6 *Sei $P(k) \in \mathbb{F}[q^k]$ q-monisch. Dann heißt $\langle P_1(k), P_2(k), \ldots, P_r(k);\, k\rangle_q$ eine q-GFF-Darstellung von $P(k)$, falls folgende Axiome erfüllt sind:*

$$
\begin{array}{ll}
(q\mathrm{GFF1}) & P(k) = \left[P_1(k)\right]_k^{\overline{1}} \left[P_2(k)\right]_k^{\overline{2}} \cdots \left[P_r(k)\right]_k^{\overline{r}}\,, \\
(q\mathrm{GFF2}) & P_1(k), P_2(k), \ldots, P_r(k) \textit{ sind q-monisch, } r > 1 \textit{ impliziert } \deg_{q^k}\big(P_r(k)\big) > 0, \\
(q\mathrm{GFF3}) & \textit{Für } i,j \in \mathbb{N}_0 \textit{ mit } i \le j \textit{ folgt: } \gcd^*\big(\left[P_i(k)\right]_k^{\overline{i}},\, P_j(k-1)\big) = 1, \\
(q\mathrm{GFF4}) & \textit{Für } i,j \in \mathbb{N}_0 \textit{ mit } i \le j \textit{ folgt: } \gcd^*\big(\left[P_i(k)\right]_k^{\overline{i}},\, P_j(k+j)\big) = 1.
\end{array}
$$

Die Axiome (qGFF3) und (qGFF4) garantieren, daß vorhandene Ketten nicht verlängert werden können: Hierbei sorgt (qGFF3) dafür, daß sich die Kette $\left[P_j(k)\right]_k^{\overline{j}}$ (bzw. Teile davon) nicht nach unten verlängern läßt. Entsprechend ist (qGFF4) für das obere Ende der Kette zuständig.

Diese vier Axiome erzeugen zudem eine eindeutige Darstellung, so daß wir im folgenden stets von *der* q-GFF-Darstellung eines Polynomes sprechen werden.

Satz 4.7 *Sei $P(k) \in \mathbb{F}[q^k]$ q-monisch mit den q-GFF-Darstellungen $\langle P_1(k), \ldots, P_r(k);\, k\rangle_q$ und $\langle Q_1(k), \ldots, Q_s(k);\, k\rangle_q$. Dann gilt $r = s$ und $P_i(k) = Q_i(k)$ für alle $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Beweis: Wir wollen die Aussage durch Induktion nach $\deg_{q^k}\big(P(k)\big)$ beweisen, wobei die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt seien.
Induktionsanfang: Der Fall $\deg_{q^k}\big(P(k)\big) = 0$ ist klar, da dann $P(k) = 1$ gilt, wofür $\langle -;\, k\rangle_q$ die einzig mögliche q-GFF-Darstellung ist.
Induktionsschritt: Angenommen, $\deg_{q^k}\big(P(k)\big) > 0$. Dann existiert aufgrund von (qGFF2) ein $T(k)$ mit

$$T(k) \quad \text{teilt} \quad P_r(k), \quad T(k) \text{ irreduzibel.} \tag{4.7}$$

Also existieren gemäß (qGFF1) i, h mit

$$T(k) \quad \text{teilt} \quad Q_i(k+h) \;\text{ bzw. }\; \left[Q_i(k)\right]_k^{\overline{i}} \quad \text{für ein } i \in \{1, \ldots, s\},\, h \in \{0, \ldots, i-1\}. \tag{4.8}$$

Wähle unter diesen möglichen Paaren (i, h) eines, so daß $i - h$ maximal ist. Gälte nun $h + r \le i$, so könnten wir schließen:

$$r \le h + r \le i \le s.$$

Aus Symmetriegründen folgt analog $s \le r$, d. h. $r = i = s$. Mit anderen Worten $T(k)$ ist ein Teiler von $P_r(k)$ und $Q_s(k)$, so daß die Behauptung des Lemmas durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die q-GFF-Darstellungen

$$\langle P_1(k), \ldots, P_{r-1}(k), P_r(k)/T(k);\, k\rangle_q \quad \text{und} \quad \langle Q_1(k), \ldots, Q_{r-1}(k), Q_r(k)/T(k);\, k\rangle_q$$

von $P(k)/\left[T(k)\right]_k^{\overline{r}}$ folgt.

[18] Im obigen Beispiel wird dies durch die letzte Darstellung realisiert.

Bleibt noch zu zeigen: $h+r \leq i$. Angenommen, es gälte $h+r > i$. Da $\big[T(k)\big]_k^{\overline{r}}$ ein Teiler von $P(k)$ ist, muß daher insbesondere wegen $r > i-h > 0$

$$T(k+i-h) \quad \text{teilt} \quad \big[Q_j(k)\big]_k^{\overline{j}} \quad \text{für ein } j \in \{1,2,\ldots,s\} \tag{4.9}$$

gelten. Da $T(k)$ irreduzibel ist, existiert also ein l mit

$$T(k+i-h) \quad \text{teilt} \quad Q_j(k+l), \quad l \in \{0,1,\ldots,j-1\}. \tag{4.10}$$

Folgende mögliche drei Fälle führen nun auf einen Widerspruch zur Annahme $h+r > i$:

(i) $\underline{i \geq j}$: Mittels (4.8) und (4.9) folgt $T(k+i-h)$ teilt $\gcd\big(\big[Q_j(k)\big]_k^{\overline{j}},\, Q_i(k+i)\big)$, ein Widerspruch zu ($q$GFF4).

(ii) $\underline{i < j \text{ und } 0 \leq i-l-1}$: Mittels (4.8) schließen wir, daß $T(k+i-h-l-1)$ ein Teiler von $Q_i(k+i-l-1)$ sein muß. Wegen $0 \leq i-l-1 \leq i-1$ ist also $T(k+i-h-l-1)$ auch ein Teiler von $\big[Q_i(k)\big]_k^{\overline{i}}$. Kombinieren wir dies nun mit (4.10) so erhalten wir

$$T(k+i-h-l-1) \quad \text{teilt} \quad \gcd\big(\big[Q_i(k)\big]_k^{\overline{i}},\, Q_j(k-1)\big),$$

ein Widerspruch zu (qGFF3).

(iii) $\underline{i < j \text{ und } i-l-1 < 0 \text{ bzw. } i \leq l}$: Nach (4.10) gilt $T(k)$ teilt $Q_j(k-i+h+l)$, wobei

$$0 \leq h \overset{i \leq l}{\leq} h+l-i \overset{l<j}{<} j-i+h \overset{h<i}{<} j.$$

Damit gälte für $\tilde{h} := h+l-i$

$$T(k) \quad \text{teilt} \quad Q_j(k+\tilde{h}) \quad \text{bzw.} \quad \big[Q_j(k)\big]_k^{\overline{j}},$$

wegen $j-\tilde{h} = i-h+j-l \overset{l<j}{>} i-h$ ein Widerspruch zur Wahl des Paares (i,h).

□

Lemma 4.8 *Sei $P(k) \in \mathbb{F}[q^k]$ q-monisch und $\langle P_1(k),\ldots,P_r(k);\, k\rangle_q$ die q-GFF-Darstellung von $P(k)$. Dann gilt:*

$$\gcd{}^*\big(P(k),\, P(k+1)\big) \;=\; \big[P_1(k+1)\big]_k^{\overline{0}}\,\big[P_2(k+1)\big]_k^{\overline{1}}\cdots\big[P_r(k+1)\big]_k^{\overline{r-1}}.$$

Beweis: Durch Induktion nach r mit dem trivialen Anfang $r=1$ erhalten wir:[19]

$$\begin{aligned}
&\gcd{}^*\big(P(k),\, P(k+1)\big)\\
&\quad= \gcd{}^*\Big(\prod_{i=1}^{r}\big[P_i(k)\big]_k^{\overline{i}},\ \prod_{i=1}^{r}\big[P_i(k+1)\big]_k^{\overline{i}}\Big)\\
&\quad= \gcd{}^*\Big(\prod_{i=0}^{r-1}P_r(k+i)\prod_{i=1}^{r-1}\big[P_i(k)\big]_k^{\overline{i}},\ \prod_{i=0}^{r-1}P_r(k+1+i)\prod_{i=1}^{r-1}\big[P_i(k+1)\big]_k^{\overline{i}}\Big)\\
&\quad= \gcd{}^*\Big(P_r(k)\prod_{i=1}^{r-1}\big[P_i(k)\big]_k^{\overline{i}},\ P_r(k+r)\prod_{i=1}^{r-1}\big[P_i(k+1)\big]_k^{\overline{i}}\Big)\prod_{i=0}^{r-2}P_r(k+1+i)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eigenschaften (qGFF3) und (qGFF4) können wir nun zeigen, daß die Faktoren $P_r(k)$ und $P_r(k+r)$ keinen Beitrag zu diesem größten gemeinsamen Teiler liefern:

[19]Der Induktionsanfang entspricht wortwörtlich Axiom (qGFF4) mit $i=j=1$.

(i) $\gcd^*\big(P_r(k), P_r(k+r)\big)$ teilt $\gcd^*\big(\left[P_r(k)\right]_k^{\overline{r}},\, P_r(k+r)\big) \overset{(q\text{GFF4})}{=} 1$,

(ii) $\gcd^*\big(\prod_{i=1}^{r-1}\left[P_r(k+1)\right]_k^{\overline{i}}, P_r(k)\big) \overset{(q\text{GFF3})}{=} 1$,

(iii) $\gcd^*\big(\prod_{i=1}^{r-1}\left[P_r(k)\right]_k^{\overline{i}}, P_r(k+r)\big) \overset{(q\text{GFF4})}{=} 1$.

Gemäß der Induktionsvoraussetzung erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\gcd^*\big(P(k),\, P(k+1)\big) &= \gcd^*\Big(\prod_{i=1}^{r-1}\left[P_i(k)\right]_k^{\overline{i}},\, \prod_{i=1}^{r-1}\left[P_i(k+1)\right]_k^{\overline{i}}\Big)\left[P_r(k+1)\right]_k^{\overline{r-1}}.\\ &= \left[P_1(k+1)\right]_k^{\overline{0}}\left[P_2(k+1)\right]_k^{\overline{1}}\cdots\left[P_r(k+1)\right]_k^{\overline{r-1}}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.9: Sei $P(k) \in \mathbb{F}\big[q^k\big]$ und $\langle P_1(k), P_2(k), \ldots, P_r(k);\, k\rangle_q$ die q-GFF-Darstellung von $P(k)$. Mittels Lemma 4.8 können wir nun eine Darstellung der Polynome $\tilde{P}_0(k)$ und $\tilde{P}_1(k)$ aus (4.5) angeben:

$$\begin{aligned}\frac{P(k)}{\gcd^*\big(P(k), P(k+1)\big)} &= \frac{\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=0}^{j-1}P_j(k+i)}{\prod_{j=2}^{r}\prod_{i=0}^{j-2}P_j(k+1+i)} = \prod_{j=1}^{r}P_j(k),\\ \frac{P(k+1)}{\gcd^*\big(P(k), P(k+1)\big)} &= \frac{\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=0}^{j-1}P_j(k+1+i)}{\prod_{j=2}^{r}\prod_{i=0}^{j-2}P_j(k+1+i)} = \prod_{j=1}^{r}P_j(k+j).\end{aligned}$$

◁

Dies ermöglicht uns, Teilbarkeitsbedingung (4.6) strukturierter zu schreiben als

$$\prod_{j=1}^{r}P_j(k+j) \quad \text{teilt} \quad Q(k) \qquad \text{und} \qquad \prod_{j=1}^{r}P_j(k) \quad \text{teilt} \quad R(k), \tag{4.11}$$

was uns zu einem einfachen Algorithmus zur Berechnung der q-GFF-Darstellung eines Zertifikatsnenners führt:

Algorithmus 4.1 Bestimmung eines Zertifikatsnenners

Input: $F(k)$ q-hypergeometrisch bzgl. k.
Output: Zertifikatsnenner $P(k)$

$\dfrac{Q_0(k)}{R_0(k)} := \dfrac{F(k+1)}{F(k)}$, wobei $Q_0(k)$ und $R_0(k)$ relativ prim seien;
$N := \mathrm{disp}_k\big(Q_0(k), R_0(k)\big)$
for $i := 1$ **to** N **do**
  $P_i(k) := \gcd(Q_{i-1}(k-i), R_{i-1}(k))$;
  $Q_i(k) := Q_{i-1}(k)/P_i(k+i)$;
  $R_i(k) := R_{i-1}(k)/P_i(k)$;
end for
$N := \min\big\{i \in \{1, 2, \ldots, N\} \bigm| P_i(k) \neq 1\big\}$;
return $\langle P_1(k), P_2(k), \ldots, P_N(k);\, k\rangle_q$;

Durch Vergleich mit dem Algorithmus 3.4 zur Berechnung einer q-Gosper-Darstellung sehen wir, daß Algorithmus 4.1 einen möglichen Zertifikatsnenner liefert.[20] Lediglich die $P_i(k)$ sind hier anders definiert, da wir hier eine einfache Darstellung als steigende Faktorielle wünschen. Zudem gilt offenbar $P_i(k) = 1$, falls $i \notin \operatorname{dispset}_k\bigl(Q_0(k), R_0(k)\bigr)$.

Betrachten wir nun noch einmal Gleichung (4.1), so stellen wir fest, daß wir u. U. noch einen Teiler des Zertifikatszählers „gratis" mitgeliefert bekommen. Nach Multiplikation mit $P(k)$ ergibt sich die Gleichung

$$X(k+1)\,\frac{Q(k)}{R(k)}\,\frac{P(k)}{P(k+1)} \;-\; X(k) \quad = \quad P(k), \tag{4.12}$$

die wir mit Hilfe der Bezeichnungen von Algorithmus 4.1 noch weiter vereinfachen können:

$$\begin{aligned}
X(k+1)\,\frac{Q(k)}{R(k)}\,\frac{P(k)}{P(k+1)} &= X(k+1)\,\frac{Q(k)}{R(k)}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=0}^{i-1}\frac{P_i(k+j)}{P_i(k+1+j)}\\
&= X(k+1)\,\frac{Q(k)}{R(k)}\prod_{i=1}^{N}\frac{P_i(k)}{P_i(k+i)}\\
&= X(k+1)\,\frac{Q(k)}{\prod_{i=1}^{N} P_i(k+i)}\,\frac{\prod_{i=1}^{N} P_i(k)}{R(k)}\\
&= X(k+1)\,\frac{Q_N(k)}{R_N(k)}
\end{aligned}$$

Aufgrund von Gleichung (4.12) ist $X(k+1)\,Q_N(k)/R_N(k) \in \mathbb{F}\bigl[q^k, q^{-k}\bigr]$, und da $Q_N(k)$ und $R_N(k)$ nach Definition teilerfremd sind, folgt also $\tilde{X}(k) := X(k+1)/R_N(k) \in \mathbb{F}\bigl[q^k, q^{-k}\bigr]$. Insofern können wir Gleichung (4.12) jetzt auf die wohlbekannte Form

$$Q_N(k)\,\tilde{X}(k) \;-\; R_N(k-1)\,\tilde{X}(k-1) \;=\; P(k) \tag{4.13}$$

bringen, welche genau Gleichung (3.11) auf Seite 25 entspricht.

[20] siehe auch die Definition der Stammfunktion auf Seite 25, Gleichung (3.10)

5 Äquivalenzklassen q-hypergeometrischer Terme

Die Menge der **q**-hypergeometrischen Terme ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation und der Inversenbildung, nicht jedoch bzgl. der Addition. Insofern stellt sich hier folgende Frage:

> Es sei ein **q**-hypergeometrischer Term gegeben, der keine **q**-hypergeometrische Stammfunktion besitze. Gibt es dann vielleicht eine Stammfunktion, die sich als endliche Linearkombination **q**-hypergeometrischer Terme darstellen läßt?

In [PWZ96] wird diese Frage für den hypergeometrischen Fall negativ beantwortet. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Einteilung hypergeometrischer Terme in Äquivalenzklassen.

Definition 5.1 *Seien $F(k)$ und $G(k)$ **q**-hypergeometrische Terme bzgl. k. Dann heißen $F(k)$ und $G(k)$ äquivalent, falls es eine rationale Funktion $R(k) \in \mathbb{F}\big(q^k\big)$ mit $F(k) \equiv R(k)\,G(k)$ gibt. In diesem Falle schreiben wir $F(k) \sim G(k)$.*

Bevor wir nun die eigentliche Frage beantworten, wollen wir zunächst zwei Hilfslemmas beweisen.

Lemma 5.2 *Sei $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $F_1(k), \ldots, F_s(k)$ **q**-hypergeometrische Terme bzgl. k mit*

$$\sum_{i=1}^{s} F_i(k) \;\equiv\; 0 \tag{5.1}$$

für alle k. Dann gibt es $i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $i \neq j$ mit $F_i(k) \sim F_j(k)$.

Beweis: Induktion über s, wobei die Voraussetzungen und Bezeichnungen des Lemmas gelten. Der Induktionsanfang für $s = 2$ ist klar. Sei also nun $s > 2$ und das Lemma gelte für alle kleineren s. Definiere nun für $i = 1, 2, \ldots, s$ $R_i(k) := F_i(k+1)/F_i(k)$. Dann folgt für alle k:

$$\sum_{i=0}^{s} R_i(k)\,F_i(k) \;\equiv\; \sum_{i=0}^{s} \frac{F_i(k+1)}{F_i(k)}\,F_i(k) \;\equiv\; 0. \tag{5.2}$$

Multiplizieren wir nun (5.1) mit $R_s(k)$ und subtrahieren (5.2), so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{s-1} \big(R_s(k) - R_i(k)\big)\,F_i(k) \;\equiv\; 0.$$

Angenommen, es existiert ein $i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ mit $R_s(k) = R_i(k)$. Dann wäre

$$\frac{F_s(k+1)}{F_s(k)} \;\equiv\; \frac{F_i(k+1)}{F_i(k)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{F_s(k+1)}{F_i(k+1)} \;\equiv\; \frac{F_s(k)}{F_i(k)}.$$

Mit anderen Worten $F_s(k)/F_i(k)$ ist unabhängig von k, also konstant und somit insbesondere $F_s(k) \sim F_i(k)$.

Ansonsten erhalten wir aufgrund der Induktionsvoraussetzung $i, j \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ mit $i \neq j$ und

$$\big(R_s(k) - R_i(k)\big)\,F_i(k) \sim \big(R_s(k) - R_j(k)\big)\,F_j(k),$$

was äquivalent ist zu $F_i(k) \sim F_j(k)$. □

Lemma 5.3 *Seien $F(k)$ und $G(k)$ zwei nicht-konstante* **q***-hypergeometrische Terme bzgl. k mit*

$$\Delta_k F(k) \sim \Delta_k G(k).$$

Dann existiert ein **q***-hypergeometrischer Term $H(k)$ mit*

$$\Delta_k H(k) \;\equiv\; \Delta_k F(k) + \Delta_k G(k). \tag{5.3}$$

Beweis: Seien $F(k), G(k)$ entsprechend den Voraussetzungen des Lemmas definiert. Dann gibt es ein $R(k) \in \mathbb{F}\big(q^k\big)$ mit $\Delta_k F(k) \equiv R(k)\, \Delta_k G(k)$, wodurch

$$\left(\frac{F(k+1)}{F(k)} - 1\right) F(k) \;\equiv\; R(k) \left(\frac{G(k+1)}{G(k)} - 1\right) G(k).$$

folgt. Da nach Voraussetzung $F(k+1) \not\equiv F(k)$ ist, können wir also durch $\big(F(k+1)/F(k) - 1\big)$ teilen und erhalten:

$$F(k) \;\equiv\; \underbrace{\frac{R(k)}{\frac{F(k+1)}{F(k)} - 1} \left(\frac{G(k+1)}{G(k)} - 1\right)}_{=:\, S(k) \,\in\, \mathbb{F}(q^k)} G(k).$$

Dann ist $H(k) := (S(k) + 1)\, G(k)$ eine **q**-hypergeometrische Lösung von (5.3). □

Mit Hilfe dieser Aussagen können wir nun zeigen, daß wir unsere Frage auch im **q**-hypergeometrischen Fall negativ beantworten können:

Existiert für einen **q**-hypergeometrischen Term $F(k)$ keine **q**-hypergeometrische Antidifferenz, so gibt es auch keine endliche Linearkombination **q**-hypergeometrischer Terme, die eine Antidifferenz für $F(k)$ bilden.

D. h. falls der **q**-Gosper Algorithmus keine Antidifferenz findet, existiert auch keine in der Funktionenklasse der endlichen Linearkombinationen **q**-hypergeometrischer Terme.

Lemma 5.4 *Sei $s \in \mathbb{N}$ und $F(k)$ sowie $G_1(k), \ldots, G_s(k)$* **q***-hypergeometrische Terme bzgl. k mit*

$$F(k) \;\equiv\; \sum_{i=1}^{s} \Delta_k G_i(k).$$

Dann existiert ein **q***-hypergeometrischer Term $H(k)$ mit*

$$F(k) \;\equiv\; \Delta_k H(k).$$

Beweis: Sei o. B. d. A. $s > 1$ und $F(k) \equiv \sum\limits_{i=1}^{s} \Delta_k G_i(k)$ entsprechend den Voraussetzungen des Lemmas.

Mit $G_i(k)$ ist offenbar auch $\Delta_k G_i(k)$ **q**-hypergeometrisch, sofern $G_i(k)$ nicht konstant ist. Ist $G_i(k)$ konstant, so folgt $\Delta_k G_i(k) \equiv 0$. Solche Terme wollen wir aus der Summe streichen.

Ferner können wir entsprechend Lemma 5.3 äquivalente Summanden zusammenfassen, so daß wir von nun an o. B. d. A. annehmen können daß

$$\Delta_k G_i(k) \not\sim \Delta_k G_j(k) \qquad \text{für alle } i \neq j \text{ mit } i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}. \tag{5.4}$$

Mittels Lemma 5.2 und Bedingung (5.4) folgern wir, daß ein $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ existiert mit $F(k) \sim \Delta_k G_i(k)$. Zudem gibt es höchstens ein solches i, da mit $F(k) \sim \Delta_k G_j(k)$, $j \in \{1, \ldots, s\} \setminus \{i\}$ aufgrund der Transitivität von $\sim$ sofort $\Delta_k G_i(k) \sim \Delta_k G_j(k)$ folgen würde, ein Widerspruch zu (5.4).

Für dieses $G_i(k)$ gilt dann

$$F(k) \;\equiv\; \Delta_k G_i(k).$$

Andernfalls wäre $\tilde{G}_i(k) := F(k) - \Delta_k G_i(k)$ ein **q**-hypergeometrischer Term äquivalent zu $\Delta_k G_i(k)$ mit

$$\tilde{G}_i(k) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{s} \Delta_k G_j(k) \;\equiv\; 0.$$

Mittels Lemma 5.2 und Bedingung (5.4) würde $\tilde{G}_i(k) \sim \Delta_k G_h(k)$ für ein $h \in \{1, \ldots, s\} \setminus \{i\}$ folgen – wegen $\tilde{G}_i(k) \sim \Delta_k G_i(k)$ ein Widerspruch zu (5.4). □

Andererseits können wir mit diesem Wissen einen einfachen Algorithmus zur Konstruktion einer Stammfunktion einer endlichen Linearkombination von **q**-hypergeometrischen Termen angeben, wobei wir fordern, daß die Stammfunktion auch wieder eine endliche Linearkombination **q**-hypergeometrischer Terme sei.

Algorithmus 5.1 q-Gosper für endliche Linearkombinationen **q**-hypergeometrischer Terme

Input: $\sum\limits_{j=0}^{t} F_j(k)$, $F_1(k), \ldots, F_t(k)$ **q**-hypergeometrisch bzgl. k.

Output: **q**-hypergeometrische Terme $G_1(k), \ldots, G_s(k)$, $s \in \mathbb{N}$ bzgl. k, so daß

$$\sum_{j=0}^{t} F_j(k) \;=\; \Delta_k \left(\sum_{j=0}^{s} G_j(k+1) \right),$$

falls eine solche Lösung existiert.

define $s \in \mathbb{N}$ und **q**-hypergeometrische Terme $\tilde{F}_1(k), \ldots, \tilde{F}_s(k)$ mit

$$\sum_{j=0}^{t} F_j(k) \;=\; \sum_{j=0}^{s} \tilde{F}_j(k), \qquad \tilde{F}_i(k) \not\sim \tilde{F}_j(k) \text{ für } i \neq j.$$

for $j := 1$ **to** s **do**
  if $\left(\nexists\, G_j(k) \right.$ **q**-hypergeometrisch bzgl. k mit $\left. F_j(k) = \Delta G_j(k) \right)$ **then**
    return „Es existiert keine endliche Linearkombination diskreter Stammfunktionen."
  end if
end for
return $\sum\limits_{j=0}^{s} G_j(k)$;

6 q-Zeilberger

Zeilbergers Algorithmus ist eine Erweiterung von Gospers Algorithmus. Ziel ist es, Rekursionsgleichungen für *definite Summen* $S(n)$,

$$S(n) \;=\; \sum_{k=a}^{b} F(n,k), \tag{6.1}$$

herzuleiten, wobei der Summand $F(n,k)$ q-hypergeometrisch bzgl. der Summationsvariable sowie der Rekursionsvariable sein muß.[21]

Sei also $F(n,k)$ ein q-hypergeometrischer Term bzgl. n und k. Anstatt direkt eine Rekursion für die Summe $S(n)$ zu bestimmen, benutzt Zeilberger Gospers Algorithmus, um eine inhomogene Rekursion für $F(n,k)$ herzuleiten. Dabei versucht er, für ein $J \in \mathbb{N}$ eine Stammfunktion für die Linearkombination

$$f_n(k) := \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j,k) \tag{6.2}$$

mit noch unbekannten Koeffizienten $\sigma_j(n)$ zu bestimmen, indem er Gospers Algorithmus auf $f_n(k)$ anwendet. Dieser läuft im wesentlichen unverändert ab. Der Clou ist jedoch, daß das Gleichungssystem (3.11) zur Bestimmung von $X(k) =: \sum_{j=n}^{N} c_j \left(q^k\right)^j$ als Gleichungssystem in $\{c_n, \ldots, c_N\}$ *und* $\{\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n)\}$ betrachtet wird, wobei sich dieses als lineares Gleichungssystem herausstellt.

Auf diese Art bekommen wir – falls eine Lösung existiert – eine Stammfunktion $G(n,k)$ für $f_n(k)$ und damit eine *inhomogene* Rekursion für $F(n,k)$:

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j,k) \;=\; G(n,k+1) - G(n,k). \tag{6.3}$$

Durch Summation über k können wir diese Rekursion dann in eine für die entsprechende Summenfunktion $S(n)$ umwandeln. Zunächst einmal wollen wir jedoch diesen Ansatz rechtfertigen.

Lemma 6.1 *Sei $F(n,k)$ ein q-hypergeometrischer Term bzgl. n und k. Ferner sei $J \in \mathbb{N}$ und*

$$f_n(k) := \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j,k). \tag{6.4}$$

Dann ist $f_n(k+1)/f_n(k)$ rational in $\mathbb{F}\left[q^n, q^k\right]$.

Wendet man auf $f(n,k)$ den Gosper-Algorithmus an, so ist das zu lösende Gleichungssystem (3.11) linear in den Koeffizienten von $X(k)$ und $\{\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n)\}$.

Beweis: Sei $F(n,k)$ ein q-hypergeometrischer Term bzgl. (n,k) und $f_n(k)$ entsprechend Gleichung (6.4) definiert. Ferner sei $\big(P(k), Q(k), R(k)\big)$ eine q-Gosper Darstellung der rationalen Funktion $f_n(k+1)/f_n(k)$.

[21] Natürlich könnte man auch hier wieder die mehrdimensionale $\mathbf{q}$-Variante betrachten, jedoch scheint diese *praktisch* irrelevant zu sein.

Rufen wir uns die entsprechenden Schritte des Algorithmus in Erinnerung, so ist nach Bestimmung eines generischen Ansatzes für $X(k) \in \mathbb{F}\big[q^k, q^{-k}\big]$ noch das Gleichungssystem (3.11) zu lösen:

$$P(k) \;=\; Q(k+1)\,X(k) - R(k)\,X(k-1)$$

D. h. wir müssen zeigen, daß die Variablen $\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n)$ nur linear in dem Polynom $P(k)$ vorkommen. Hierfür wollen wir die q-Gosper Darstellung genauer bestimmen. Seien also $S_{n,k}$, $T_{n,k}$, $V_{n,k}$ und $W_{n,k} \in \mathbb{F}\left[q^k, q^n\right]$ mit

$$\frac{V_{n,k}}{W_{n,k}} := \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \qquad \text{und} \qquad \frac{S_{n,k}}{T_{n,k}} := \frac{F(n-1,k)}{F(n,k)}.$$

Dann folgt mittels

$$\frac{F(n-j,k)}{F(n,k)} \;=\; \prod_{i=0}^{j-1} \frac{F(n-i-1,k)}{F(n-i,k)} \;=\; \prod_{i=0}^{j-1} \frac{S_{n-i,k}}{T_{n-i,k}}$$

für den Quotienten $f_n(k+1)/f_n(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{f_n(k+1)}{f_n(k)} &= \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \frac{\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, \frac{F(n-j,k+1)}{F(n,k+1)}}{\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, \frac{F(n-j,k)}{F(n,k)}} \\ &= \frac{V_{n,k}}{W_{n,k}} \frac{\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, \prod_{i=0}^{j-1} \frac{S_{n-i,k+1}}{T_{n-i,k+1}}}{\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, \prod_{i=0}^{j-1} \frac{S_{n-i,k}}{T_{n-i,k1}}} \\ &= \frac{V_{n,k}}{W_{n,k}} \frac{\prod_{j=0}^{J} T_{n-j,k}}{\prod_{j=0}^{J} T_{n-j,k+1}} \frac{\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, \prod_{i=0}^{j-1} S_{n-i,k+1} \prod_{i=j}^{J} T_{n-i,k+1}}{\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, \prod_{i=0}^{j-1} S_{n-i,k} \prod_{i=j}^{J} T_{n-i,k}}. \end{aligned}$$

Offenbar ist $f_n(k+1)/f_n(k) \in \mathbb{F}\big(q^n, q^k\big)$. Zudem sieht man sofort, daß wir bei Berechnung der q-Gosper Darstellung für den Zeilberger-Algorithmus gleich folgenden Ansatz machen können:

$$\tilde{P}(k) = \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n) \prod_{i=0}^{j-1} S_{n-i,k} \prod_{i=j}^{J} T_{n-i,k}, \quad \tilde{Q}(k) = V_{n,k} \prod_{j=0}^{J} T_{n-j,k}, \quad \tilde{R}(k) = W_{n,k} \prod_{j=0}^{J} T_{n-j,k+1}. \tag{6.5}$$

D. h. hier enthält die Dispersionsmenge stets die Zahl eins, was dafür sorgt, daß nur $\tilde{P}(k)$ die Variablen $\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n)$ als *lineare* Parameter enthält. □

Somit können wir also für $f_n(k+1)/f_n(k)$ eine q-Gosper-Darstellung berechnen und mit Hilfe dieser die Rekursionsgleichung für $X(k)$ aufstellen. Verfolgen wir nun den nächsten Schritt im q-Gosper-Algorithmus, so benötigen wir eine Gradschranke für $X(k)$. Schaut man sich allerdings noch einmal Lemma 3.13 an, so stellt man fest, daß man es auch hier benutzen kann: Existiert eine Lösung, so ist der Grad des *symbolischen* $P(k)$ – d. h. mit noch unbestimmten $\sigma_j(n)$ – immer größer als der Grad von $P(k)$, wo die $\sigma_j(n)$ durch konkrete Werte aus $\mathbb{F}\big(q^n\big)$ ersetzt wurden. Insofern liefert Lemma 3.13 schlimmstenfalls einen zu „pessimistischen" Wert.

Nun wollen wir uns noch einmal genauer anschauen, wie wir die inhomogene Rekursion für $F(n,k)$ in eine für die Summe $S(n)$

$$S(n) \;=\; \sum_{k=l_n}^{h_n} F(n,k)$$

umwandeln können, wobei die Summationsgrenzen folgende Eigenschaften haben sollen:

(i) Es existiert ein $j \in \{0,\ldots,J\}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{L}_n = \{l_{n-j} \mid j = 0,\ldots,J\}$ stets $\max(\mathcal{L}_n) = l_{n-j} =: \alpha_n$ ist.

(ii) Es existiert ein $j \in \{0,\ldots,J\}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{H}_n = \{h_{n-j} \mid j = 0,\ldots,J\}$ stets $\min(\mathcal{H}_n) = h_{n-j} =: \omega_n$ ist.

Die Idee ist nun, Gleichung (6.3) über k von α_n bis ω_n zu summieren, wobei $F(n,k)$ und $G(n,k)$ auf dem entsprechenden Bereich wohldefiniert seien. Beachte, daß $\sigma_j(n) \in \mathbb{F}(q^n)$, also rationale Funktionen in q^n sind. Haben diese Polstellen, so gilt die Rekursion (6.3) u. U. erst für *hinreichend große* n. Somit folgt

$$\sum_{k=\alpha_n}^{\omega_n} \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j,k) \quad = \quad \sum_{k=\alpha_n}^{\omega_n} \big(G(n,k+1) - G(n,k)\big),$$

bzw.

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n) \left(S(n-j) - \sum_{k=l_{n-j}}^{\alpha_n - 1} F(n-j,k) - \sum_{k=\omega_n+1}^{h_{n-j}} F(n-j,k) \right) \;=\; G(n,\omega_n+1) - G(n,\alpha_n).$$

Bringen wir nun alle „Korrekturterme“ auf die rechte Seite, so erhalten wir die gesuchte Rekursion für $S(n)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, S(n) \;&=\; G(n,\omega_n+1) - G(n,\alpha_n) + \\ &\qquad \sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{k=l_{n-j}}^{\alpha_n-1} F(n-j,k) + \sum_{k=\omega_n+1}^{h_{n-j}} F(n-j,k) \right). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Notabene: Will man die Bestimmung des inhomogenen Anteils – d. h. der rechten Seite von Gleichung (6.6) – nun implementieren, so sollte man den hier vorgestellten Summationsbereich (k von α_n bis ω_n) wählen.

Theoretisch wäre es durchaus denkbar, über k von $\min(\mathcal{L}_n)$ bis $\max(\mathcal{H}_n)$ zu summieren. Dies kann jedoch problematisch sein, falls der Summand $F(n,k)$ außerhalb des Summationsbereiches (teilweise) nicht wohldefiniert ist. In diesem Falle versagt das Programm u. U., obwohl die Herleitung einer Rekursion für die Summe $S(n)$ aus der Rekursion für den Summanden $F(n,k)$ möglich ist. $\triangleleft$

Bevor wir den q-Zeilberger-Algorithmus weiter untersuchen, wollen wir noch einige Anmerkungen zur Implementierung (in MAPLE) machen:

- Um effizient eine q-Gosper-Darstellung für $f_n(k+1)/f_n(k)$ (siehe Gleichung (6.2)) zu berechnen, ist es sinnvoll, $P(k)$, $Q(k)$ und $R(k)$ gleich gemäß Gleichung (6.5) zu wählen. Hierdurch wir vor allen Dingen die Berechnung der Dispersionsmenge einfacher.

- Schon nach kurzer Zeit erwies sich eine rigide Vereinfachung von Potenzen mittels der Regeln $x^{a+b} \to x^a\, x^b$ und $\left(x^a\right)^b \to x^{a\,b}$ als unumgänglich, da ansonsten die Rechenzeiten explodierten. Die rein *syntaktische* Verwendung dieser Regeln stellt allerdings eine potentielle Fehlerquelle dar, wie z. B. bei der Vereinfachung $\sqrt{x^2} \to x$, die nicht für alle $x \in \mathbb{C}$ gültig ist.

  Eine weitere Zeitersparnis ergab sich durch die Substitution von Ausdrücken wie $\exp(I\,\theta)$ und q^a, die unabhängig von der Rekursionsvariable und der Summationsvariable sind, durch symbolische Variablen, wie z. B. ξ bzw. α. Der Zeitgewinn basiert dabei z. T. darauf, daß MAPLE solche Ersetzungen z. B. bei Aufruf des Kommandos `normal` selbst vornimmt.

- In MAPLE verursacht insbesondere die Vereinfachung von Ausdrücken, die Wurzeln enthalten, Probleme. Dies umgehen wir dadurch, daß wir nach Bildung der Quotienten $F(n+1,k)/F(n,k)$ und $F(n,k+1)/F(n,k)$ alle Ausdrücke q^{a_i/b_i} betrachten und anschließend q durch $q^{\operatorname{lcm}\{b_i\}}$ ersetzen.

- Da MAPLEs Prozedur `solve` für große lineare Gleichungssysteme zu langsam ist, haben wir eine Gaußelimination implementiert: Diese bringt die zu dem System äquivalente erweiterte Koeffizientenmatrix auf Dreiecksform und löst das System dann durch Rücksubstitution.

- Von A. Riese stammt eine Idee, die auf folgender Überlegung basiert (siehe auch Appendix B.9 in [Rie97]). Ist das Gleichungssystem

  $$f\,a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 = b_1 \qquad\qquad f\,a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 = b_2$$

  gegeben und eine Lösung (x_1,x_2) gesucht, so kann es effizienter sein, zunächst eine Lösung $(\tilde{x}_1,x_2)$ des Systems

  $$a_{1,1}\,\tilde{x}_1 + a_{1,2}\,x_2 = b_1 \qquad\qquad a_{2,1}\,\tilde{x}_1 + a_{2,2}\,x_2 = b_2$$

  zu bestimmen. Diese liefert dann mittels $(\tilde{x}_1/f, x_2)$ eine Lösung des ursprünglichen Systems.

  Dementsprechend kann man zunächst die konstanten Faktoren vor den $\sigma_j(n)$ in (6.5) weglassen. Sollte eine Lösung existieren, so konvertiert man diese mittels der weggelassenen Faktoren in eine Lösung für das ursprüngliche Gleichungssystem.

  Insbesondere bei höheren Rekursionsordnungen und Rekursionen mit komplizierten $\sigma_j(n)$ erweist sich dieses Vorgehen als geschwindigkeitssteigernd.[22]

- Problematisch ist vor allen Dingen die Berechnung des inhomogenen Teils der Rekursion (6.6). So ist dieser oft Null, wobei die Schwierigkeit jedoch gerade darin besteht, zu erkennen, ob ein Summand Null ist. So gilt z. B. $(q;q)_k^{-1} = 0$, falls $-k \in \mathbb{N}$ ist, d. h.

[22] In einigen Fällen wird durch diese Methode die Anwendung des q-Zeilberger Algorithmus' überhaupt erst ermöglicht, da sonst das zu lösende Gleichungssystem zu kompliziert ist.

man muß feststellen können, aus welchem Bereich k stammt. Mittels MAPLEs `assume`-Funktion lassen sich solche Annahmen auf Parameterwerte spezifizieren, allerdings ist bisher eine *effiziente Bestimmung* nicht möglich. Vor allem sind bei vielen Parametern generelle Aussagen nicht zu erwarten: So ist z. B. je nach Parameterbelegung der Ausdruck $k = 2\,a - b\,c + d^2$ mal größer und mal kleiner Null.

Somit bleibt auch hier eine potentielle Fehlerquelle, da Terme u. U. zu Null vereinfacht werden, obwohl sie ungleich Null sein können.

6.1 Der q-Zeilberger-Algorithmus und Summationsidentitäten

Angenommen, wir wollen eine Identität der Form

$$\sum_{k=a}^{b} F(n,k) \;=\; \sum_{k=c}^{d} D(n,k)$$

beweisen, wobei $F(n,k)$ und $D(n,k)$ q-hypergeometrische Terme bzgl. n und k seien. Findet der q-Zeilberger-Algorithmus eine Rekursion für die linke und rechte Seite der Identität, so müssen wir nur noch überprüfen, ob die Rekursionen sowie hinreichend viele Anfangswerte übereinstimmen.

Der Vorteil des Algorithmus' liegt jedoch in der Tatsache, daß wir auch die Gültigkeit der Rekursion für die Summe leicht beweisen können, sofern zu der Rekursion noch das *rationale Zertifikat* $G(n,k)/F(n,k) \in \mathbb{F}\big(q^n, q^k\big)$ (siehe (6.3)) angegeben wird:

1. Gegeben sei eine (inhomogene) Rekursion

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, S(n-j) \;=\; B(n) \tag{6.7}$$

für die Summe (6.1) sowie das *Zertifikat* $Z(n,k) \in \mathbb{F}\big(q^n, q^k\big)$.

2. Nun definieren wir $G(n,k) = Z(n,k)\,F(n,k)$, substituieren $B(n) \to G(n,k+1) - G(n,k)$ sowie $S(n-j) \to F(n-j,k)$ in Gleichung (6.7) und erhalten so (6.3). Anschließend teilen wir Gleichung (6.3) durch $F(n,k)$ und erhalten so eine in q^k und q^n *rationale Identität*, die leicht zu überprüfen ist.

3. Gilt (6.3), so brauchen wir diese Gleichung entsprechend dem vorigen Abschnitt nur über k zu summieren und erhalten so Gleichung (6.6), deren rechte Seite gleich $B(n)$ sein sollte.

Ein alternativer Beweis für den abbrechenden q-Binomialsatz

$${}_1\phi_0\!\left(\begin{matrix} q^{-n} \\ \text{—} \end{matrix}\,\middle|\, q;\, z\right) \;=\; \big(z\,q^{-n}; q\big)_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.8}$$

bestände somit z. B. aus der Zeile

$$q^n\,\big(q^n - 1\big)\,S(n) - \big(q^n - z\big)\,\big(q^n - 1\big)\,S(n-1) = 0,\;\; S(0) = 1,\;\; Z(n,k) = q^n\,\big(1 - q^k\big). \tag{6.9}$$

Hierbei sorgt der Faktor $\big(q^n-1\big)$ dafür, daß die Rekursion auch für $n=0$ gilt. Beeindruckender wird es, wenn wir den Algorithmus jedoch auf größere Beispiele anwenden, z. B. auf *Watsons Transformationsformel*, die im Anhang von [GR90] als Gleichung (III.18) auftaucht:

$$
\begin{aligned}
&{}_8\phi_7\left(\left.\begin{matrix} a, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, d, e, q^{-n} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, a\,q/b, a\,q/c, a\,q/d, a\,q/e, a\,q^{n+1}\end{matrix}\right| q;\, \frac{a^2\,q^{n+2}}{b\,c\,d\,e}\right) = \\
&\qquad \frac{(a\,q;q)_n\,(a\,q/(d\,e);q)_n}{(a\,q/d;q)_n\,(a\,q/e;q)_n}\,{}_4\phi_3\left(\left.\begin{matrix} a\,q/(b\,c), d, e, q^{-n} \\ a\,q/b, a\,q/c, d\,e\,q^{-n}/a\end{matrix}\right| q;\, q\right). \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

Sowohl für die linke Seite als auch für die rechte Seite findet der q-Zeilberger-Algorithmus die homogene Rekursion[23]

$$
\begin{aligned}
&q\,(a\,q^n-b)\,(a\,q^n-c)\,(a\,q^n-d)\,(a\,q^n-e)\,S(n)- \\
&\quad \big(a\,b\,d\,e\,q^{n+1}+a\,b\,c\,e\,q^{n+1}+a\,b\,c\,d\,q^{n+1}-a^2\,e\,q^{2\,n+1}-a^2\,b\,q^{2\,n+1}-a^2\,c\,q^{2\,n+1}- \\
&\quad a^2\,d\,q^{2\,n+1}+a\,c\,e\,d\,q^{n+1}-a^3\,q^{2\,n+1}+b\,c\,d\,e\,q^{n+1}+a^2\,q^{n+2}-b\,c\,d\,e\,q^2+a^3\,q^{3\,n+1}- \\
&\qquad b\,c\,d\,e\,q+a^3\,q^{3\,n}-a\,b\,c\,d\,e\,q^{2\,n}\big)(a\,q^n-1)\,S(n-1) \\
&\qquad +(q-a\,q^n)\,(q^n\,a^2-b\,c\,d\,e)\,(a\,q^n-1)\,(q-q^n)\,S(n-2) \quad = \quad 0, \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

wobei wir für die linke Seite von Gleichung (6.10) das Zertifikat

$$
Z_{{}_8\phi_7}(n,k) \;=\; -\frac{q\,(a\,q^k-b)\,(a\,q^k-c)\,(a\,q^k-d)\,(a\,q^k-e)\,(a\,q^n\,q^k-1)\,(q^k-1)\,(q^{2\,n})}{(q^n-1)\,(\sqrt{a}\,q^k-1)\,(\sqrt{a}\,q^k+1)\,(q^{2\,k})}
$$

erhalten und

$$
Z_{{}_4\phi_3}(n,k) \;=\; -\frac{q^{2\,n+1}\,(a-d\,e)\,(a\,q^n-d)\,(a\,q^n-e)\,(a\,q^k-b)\,(a\,q^k-c)\,(q^k-1)}{(q^n-1)\,(a\,q^n-d\,e\,q^k)\,q^k}
$$

für die rechte Seite. Der einfachste Teil besteht nun darin, die Identität für $n=0$ und $n=1$ zu verifizieren. Die Ausführung des kompletten Beweises von Identität (6.10) mittels der Rekursion sowie der Zertifikate bleibt dem *geneigten Leser* überlassen.

Verwendet man den q-Zeilberger-Algorithmus, um Identitäten zu beweisen oder gar herzuleiten, so ergeben sich natürlicherweise zwei Fragen:

1. Ist der q-Zeilberger-Algorithmus ein Entscheidungsalgorithmus? D. h. findet der Algorithmus genau dann eine eine (inhomogene) Rekursion[24] für die Summe $\sum_k F(n,k)$ mit in q^n rationalen Koeffizienten, wenn eine solche existiert?

2. Falls der Algorithmus eine Rekursion liefert, ist diese minimal bzgl. der Rekursionsordnung?

Die erste Frage ist meines Wissens bisher noch nicht geklärt. Allerdings muß für den Erfolg des q-Zeilberger-Algorithmus ja eine ganz spezielle Rekursion für den *Summanden* existieren, damit eine Rekursion für die Summe hergeleitet werden kann. Insofern wäre es durchaus

[23]Unsere MAPLE-Implementierung braucht inklusive der Berechnung des inhomogenen Anteils (in diesem Fall verschwindet er) jeweils ca. 10s.

[24]eventuell zu hoher Ordnung

vorstellbar, daß es eine definite Summe gibt, für die eine (inhomogene) Rekursion[25] mit rationalen Koeffizienten existiert, wobei der Algorithmus trotzdem für beliebige Ordnungen keine Rekursion findet.

Der zweiten Frage werden wir uns im Abschnitt 6.3 widmen, merken aber jetzt schon an, daß die Antwort negativ ausfallen wird.

6.2 Existenz von Rekursionsgleichungen

Im folgenden wollen wir zunächst ein Beispiel einer Summe q-hypergeometrischer Terme betrachten, für die der q-Zeilberger-Algorithmus keine Rekursion findet. Leider ist jedoch unklar, ob überhaupt eine Rekursion mit rationalen Koeffizienten für diese Summe existiert.

Beispiel 6.2: Sei $S(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} F(n,k)$, mit

$$F(n,k) = \frac{1}{q^k + q^n + 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

Definiere nun $S_{n,k}, T_{n,k}, V_{n,k}, W_{n,k} \in \mathbb{F}\big(q^n, q^k\big)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} &= \frac{1}{q^k} \frac{q^k - q^n}{1 - q^{k+1}} \frac{q^k + q^n + 1}{q^{k+1} + q^n + 1} =: \frac{V_{n,k}}{W_{n,k}}, \\ \frac{F(n-1,k)}{F(n,k)} &= \frac{1}{q^k} \frac{q^k - q^n}{1 - q^n} \frac{q^k + q^n + 1}{q^k + q^{n-1} + 1} =: \frac{S_{n,k}}{T_{n,k}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gleichung (6.5) erhalten wir zunächst $\tilde{P}(k), \tilde{Q}(k)$ und $\tilde{R}(k)$ mit[26]

$$\tilde{Q}(k) = \big(q^k - q^n\big)\, Z(k-1) \qquad \text{und} \qquad \tilde{R}(k) = q^k\, q^{J+2} \left(q^{-1} - q^k\right) Z(k), \tag{6.12}$$

wobei

$$Z(k) \;=\; \left(q^k + q^{n-1} + q^{-1}\right) \prod_{j=0}^{J} \left(q^k + q^{n-2-j} + q^{-1}\right).$$

In diesem Fall ist aber bereits $\big(\tilde{P}(k), \tilde{Q}(k), \tilde{R}(k)\big) \in \mathbb{F}\left[q^n, q^k\right]^3$ eine q-Gosper-Darstellung von $f_n(k+1)/f_n(k)$, wobei $f_n(k)$ entsprechend Gleichung (6.4) definiert sei: Ein Vergleich von $\tilde{Q}(k)$ und $\tilde{R}(k+l)$ zeigt, daß diese für $l \in \mathbb{N}_0$ keine gemeinsamen Faktoren besitzen.

Somit bleibt also folgende Rekursionsgleichung für $X(k)$ zu lösen:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k) &= \tilde{Q}(k)\, X(k) - \tilde{R}(k-1)\, X(k-1) \\ &= Z(k-1) \left(\left(q^k - q^n\right) X(k) + q^{J+2}\, q^{k-1} \left(q^{k-1} - q^{-1}\right) X(k-1) \right). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Gemäß dem Beweis zur Berechnung einer q-Gosper-Darstellung (siehe Lemma 3.7 auf Seite 22) muß $\big(\tilde{P}(k), \tilde{Q}(k), \tilde{R}(k)\big)$ aber eine *kanonische* q-Gosper-Darstellung sein, da lediglich die Zahl eins in der Dispersionsmenge enthalten war.

[25] Interessant sind hier die Rekursionen mit einer **q**-hypergeometrischen Inhomogenität.

[26] Eine explizite Darstellung von $\tilde{P}(k)$ benötigen wir für den Beweis nicht.

Nach Gleichung (6.12) und (6.13) ist aber $Z(k)$ ein Teiler von $\tilde{R}(k)$ und $\tilde{P}(k+1)$, ein Widerspruch zu (**q**GR4). $\diamondsuit$

Im wesentlichen verursachte hier der Nenner $q^n + q^k + 1$ das Scheitern des Algorithmus'. Für eine große Klasse von q-hypergeometrischen Termen können wir jedoch den Erfolg des Algorithmus garantieren.

Definition 6.3 *Eine Funktion $F(n,k)$ heißt gewöhnlich q-hypergeometrisch, falls sie sich darstellen läßt als*

$$F(n,k) = \frac{\prod_{l=1}^{r} \left(A_l\, q^{m_l\,(d_l\,n+e_l\,k)}; q^{m_l}\right)_{a_l\,n+b_l\,k+c_l}}{\prod_{l=1}^{s} \left(B_l\, q^{p_l\,(f_l\,n+g_l\,k)}; q^{p_l}\right)_{u_l\,n+v_l\,k+w_l}} P(q^n,q^k)\, q^{\zeta\binom{k}{2}+(\eta\,n+\theta)\,k}\, z^k, \tag{6.14}$$

wobei gelte:

A_l, B_l, z	*seien rationale Funktionen aus* $\mathbb{K}(q)\setminus\{0\}$,
$a_l, b_l, c_l, d_l, e_l, f_l, g_l, m_l, p_l, u_l, v_l, w_l, \zeta, \eta, \theta$	*seien ganze Zahlen*[27],
P	*sei ein Polynom in* $\mathbb{K}(q)[q^n,q^k]$.

Wir wollen nun zeigen, daß für ein solches $F(n,k)$ eine k-*freie* Rekursion vom Typ

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} \sigma_{i,j}(n)\, F(n-j,k-i) = 0 \tag{6.15}$$

existiert. Hierbei bedeutet der Zusatz k-frei, daß die Polynome $\sigma_{i,j}(n)$ unabhängig von k sind. Bevor wir uns nun dem Existenzproblem widmen, wollen wir zunächst ein Hilfslemma bzgl. eines Quotienten von q-Pochhammer-Termen beweisen.

Lemma und Definition 6.4 *Für $z \in \mathbb{Z}$ setze $(z)^+ = \max\{0,z\}$ und $(z)^- = \max\{0,-z\}$ sowie*

$$\Lambda_{j,i}(A;a,b,c;d,e;n,k;q^m) \;=\; \frac{\left(A\,q^{m\,(d\,(n-j)+e\,(k-i))}; q^m\right)_{a\,(n-j)+b\,(k-i)+c}}{\left(A\,q^{m\,(d\,n+e\,k)}; q^m\right)_{a\,n+b\,k+c}},$$

wobei $A \in \mathbb{K}(q)\setminus\{0\}$ und $a,b,c,d,e,i,j,m \in \mathbb{Z}$ seien. Dann gibt es $C(k), D(k) \in \mathbb{F}\left[q^k\right]$ mit

$$\frac{C(k)}{D(k)} \;=\; \Lambda_{j,i}(A;a,b,c;d,e;n,k;q^m)\,, \tag{6.16}$$

deren Grad, $\nu = \deg_{q^k}(C(k))$ bzw. $\delta = \deg_{q^k}(D(k))$ sich mit Hilfe von $\mu_{i,j} = -d\,j - e\,i$ und $\lambda_{i,j} = -(a+d)\,j - (b+e)\,i$ folgendermaßen schreiben läßt:

$$\begin{aligned}
\nu &= (\lambda_{i,j})^+\,(m\,(b+e))^+ + (\lambda_{i,j})^-\,(m\,(b+e))^- + (\mu_{i,j})^+\,(m\,e)^- + (\mu_{i,j})^-\,(m\,e)^+,\\
\delta &= (\lambda_{i,j})^+\,(m\,(b+e))^- + (\lambda_{i,j})^-\,(m\,(b+e))^+ + (\mu_{i,j})^+\,(m\,e)^+ + (\mu_{i,j})^-\,(m\,e)^-.
\end{aligned}$$

[27] c_l und w_l können noch von weiteren Parametern abhängig sein.

Beweis: Seien $\lambda_{i,j}$ und $\mu_{i,j}$ entsprechend dem Lemma definiert. Ferner setze $V(k) = \Lambda_{j,i}(A; a, b, c; d, e; n, k; q^m)$ sowie

$$y_x = A\, q^{m\,n\,(d+a)+m\,(c+x)} \qquad \text{und} \qquad z_x = A\, q^{m\,(d\,n+x)}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
V(k) &= \frac{\prod\limits_{x=0}^{a\,n+b\,k+c-a\,j-b\,i-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,(n-j)+e\,(k-i))}\, q^{m\,x}\right)}{\prod\limits_{x=0}^{a\,n+b\,k+c-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k)}\, q^{m\,x}\right)} \\
&= \frac{\prod\limits_{x=\mu_{i,j}}^{a\,n+b\,k+c+\lambda_{i,j}-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)}{\prod\limits_{x=0}^{a\,n+b\,k+c-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)} \\
&= \begin{cases}
\left[\prod\limits_{x=a\,n+b\,k+c}^{a\,n+b\,k+c+\lambda_{i,j}-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right] \left[\prod\limits_{x=0}^{\mu_{i,j}-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k)}\, q^{m\,x}\right)\right]^{-1}, & \\
\hfill \text{falls } \mu_{i,j} \geq 0,\ \lambda_{i,j} \geq 0, & \\
\left[\prod\limits_{x=a\,n+b\,k+c+\lambda_{i,j}}^{a\,n+b\,k+c-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right]^{-1} \left[\prod\limits_{x=0}^{\mu_{i,j}-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right]^{-1}, & \\
\hfill \text{falls } \mu_{i,j} \geq 0,\ \lambda_{i,j} < 0, & \\
\left[\prod\limits_{x=a\,n+b\,k+c}^{a\,n+b\,k+c+\lambda_{i,j}-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right] \left[\prod\limits_{x=\mu_{i,j}}^{-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right], & \\
\hfill \text{falls } \mu_{i,j} < 0,\ \lambda_{i,j} \geq 0, & \\
\left[\prod\limits_{x=a\,n+b\,k+c+\lambda_{i,j}}^{a\,n+b\,k+c-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right]^{-1} \left[\prod\limits_{x=\mu_{i,j}}^{-1} \left(1 - A\, q^{m\,(d\,n+e\,k+x)}\right)\right], & \\
\hfill \text{falls } \mu_{i,j} < 0,\ \lambda_{i,j} < 0, &
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\left[\prod\limits_{x=0}^{\lambda_{i,j}-1} \left(1 - y_x \left(q^k\right)^{m\,(b+e)}\right)\right] \left[\prod\limits_{x=0}^{\mu_{i,j}-1} \left(1 - z_x \left(q^k\right)^{m\,e}\right)\right]^{-1}, & \mu_{i,j} \geq 0,\ \lambda_{i,j} \geq 0, \\
\left[\prod\limits_{x=\lambda_{i,j}}^{-1} \left(1 - y_x \left(q^k\right)^{m\,(b+e)}\right)\right]^{-1} \left[\prod\limits_{x=0}^{\mu_{i,j}-1} \left(1 - z_x \left(q^k\right)^{m\,e}\right)\right]^{-1}, & \mu_{i,j} \geq 0,\ \lambda_{i,j} < 0, \\
\left[\prod\limits_{x=0}^{\lambda_{i,j}-1} \left(1 - y_x \left(q^k\right)^{m\,(b+e)}\right)\right] \left[\prod\limits_{x=\mu_{i,j}}^{-1} \left(1 - z_x \left(q^k\right)^{m\,e}\right)\right], & \mu_{i,j} < 0,\ \lambda_{i,j} \geq 0, \\
\left[\prod\limits_{x=\lambda_{i,j}}^{-1} \left(1 - y_x \left(q^k\right)^{m\,(b+e)}\right)\right]^{-1} \left[\prod\limits_{x=\mu_{i,j}}^{-1} \left(1 - z_x \left(q^k\right)^{m\,e}\right)\right], & \mu_{i,j} < 0,\ \lambda_{i,j} < 0.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Es ist einfach, anhand dieser Gleichungen die Aussage bzgl. des Grades von $C(k)$ bzw. $D(k)$ zu verifizieren. □

Satz 6.5 *Ist $F(n,k)$ ein gewöhnlicher q-hypergeometrischer Term gemäß* (6.14) *und*

$$\beta_l = m_l\,(b_l + e_l), \qquad \varepsilon_l = m_l\, e_l, \qquad \gamma_l = p_l\,(v_l + g_l), \qquad \varrho_l = p_l\, g_l, \tag{6.17}$$

so existiert für $I = \Phi\,(\Psi - 1) + \Xi + 1$ und $J = \Phi$ eine k-freie Rekursion der Form (6.15), wobei

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{l=1}^{r} \big(\,|b_l + e_l|\;|\beta_l| + |e_l|\;|\varepsilon_l|\,\big) + \sum_{l=1}^{s} \big(\,|v_l + g_l|\;|\gamma_l| + |g_l|\;|\varrho_l|\,\big) + |\zeta|\,,\\
\Psi &= \sum_{l=1}^{r} \big(\,|a_l + d_l|\;|\beta_l| + |d_l|\;|\varepsilon_l|\,\big) + \sum_{l=1}^{s} \big(\,|u_l + f_l|\;|\gamma_l| + |f_l|\;|\varrho_l|\,\big) + |\eta|\,,\\
\Xi &= \deg_{q^k}\Big(P(q^n, q^k)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Es gelten die Bezeichnungen des Lemmas. Teilen wir nun Gleichung (6.15) durch $\tilde F(n,k) := F(n,k)/P(q^n, q^k)$, so erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} \sigma_{i,j}(n)\,\frac{F(n-j,k-i)}{\tilde F(n,k)} \;=\; 0. \tag{6.18}$$

Anschließend bringen wir die linke Seite auf einen Hauptnenner. Die Summe aller Zähler ist dann ein Polynom in q^k, dessen Koeffizienten identisch Null sein müssen. Auf diese Weise erhalten wir ein in $\sigma_{i,j}(n)$ *lineares* Gleichungssystem, das notwendigerweise eine nichttriviale Lösung besitzt, falls mehr Variablen als Gleichungen vorhanden sind.

Um die Anzahl der Gleichungen zu bestimmen, wollen wir zunächst den Grad des Zählers bzw. Nenners jedes Summanden ermitteln:

$$\begin{aligned}
\frac{F(n-j,k-i)}{\tilde F(n,k)} \quad &= \quad \frac{\prod\limits_{l=1}^{r} \Lambda_{j,i}(A_l; a_l, b_l, c_l; d_l, e_l; n, k; q^{m_l})}{\prod\limits_{l=1}^{s} \Lambda_{j,i}(B_l; u_l, v_l, w_l; f_l, g_l; n, k; q^{p_l})}\, P(q^{n-j}, q^{k-i}) \cdot \\
&\qquad q^{\zeta\,\left(-i\,k + (i^2+i)/2\right) + \eta\,(-j\,k - i\,n + i\,j) - \theta\,i}\, z^{-i}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Mit Hilfe von Lemma 6.4 können wir jetzt den Grad des Zählers bzw. Nenners von (6.19) abschätzen, wobei wir folgende Abkürzungen benutzen wollen:

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,j}^{(l)} &= -(a_l + d_l)\,j - (b_l + e_l)\,i, & \mu_{i,j}^{(l)} &= -d_l\,j - e_l\,i,\\
\varphi_{i,j}^{(l)} &= -(u_l + f_l)\,j - (v_l + g_l)\,i, & \psi_{i,j}^{(l)} &= -f_l\,j - g_l\,i.
\end{aligned}$$

Nun gilt für den Grad des Zählerpolynoms $\nu_{i,j}$ und den Grad des Nennerpolynoms $\delta_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
\nu_{i,j} = &\sum_{l=1}^{r} \left(\left(\lambda_{i,j}^{(l)}\right)^{+} (\beta_l)^{+} + \left(\lambda_{i,j}^{(l)}\right)^{-} (\beta_l)^{-} + \left(\mu_{i,j}^{(l)}\right)^{+} (\varepsilon_l)^{-} + \left(\mu_{i,j}^{(l)}\right)^{-} (\varepsilon_l)^{+} \right) + \\
&\sum_{l=1}^{s} \left(\left(\varphi_{i,j}^{(l)}\right)^{+} (\gamma_l)^{-} + \left(\varphi_{i,j}^{(l)}\right)^{-} (\gamma_l)^{+} + \left(\psi_{i,j}^{(l)}\right)^{+} (\varrho_l)^{+} + \left(\psi_{i,j}^{(l)}\right)^{-} (\varrho_l)^{-} \right) + \\
&(\zeta\,i + \eta\,j)^{-} + \deg_{q^k}\Big(P(q^n, q^k)\Big)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} = &\sum_{l=1}^{r}\left(\left(\lambda_{i,j}^{(l)}\right)^{+}(\beta_l)^{-} + \left(\lambda_{i,j}^{(l)}\right)^{-}(\beta_l)^{+} + \left(\mu_{i,j}^{(l)}\right)^{+}(\varepsilon_l)^{+} + \left(\mu_{i,j}^{(l)}\right)^{-}(\varepsilon_l)^{-}\right) + \\ &\sum_{l=1}^{s}\left(\left(\varphi_{i,j}^{(l)}\right)^{+}(\gamma_l)^{+} + \left(\varphi_{i,j}^{(l)}\right)^{-}(\gamma_l)^{-} + \left(\psi_{i,j}^{(l)}\right)^{+}(\varrho_l)^{-} + \left(\psi_{i,j}^{(l)}\right)^{-}(\varrho_l)^{+}\right) + \\ &(\zeta\, i + \eta\, j)^{+}.\end{aligned} \tag{6.21}$$

Offenbar entspricht die Bestimmung eines Hauptnenners der linken Seite von Gleichung (6.18) einer Maximierung der Summe (6.21) über $i = 0, \ldots, I$ und $j = 0, \ldots, J$:

1. Die erste Art von Polynomen, die einen Beitrag zum Nenner liefern, sind Monome $q^{i\,k}$, $i \in \mathbb{N}$. Nun ist aber offenbar $q^{i\,k}$ genau dann ein Teiler von $q^{l\,k}$, $l \in \mathbb{N}$, wenn $i < l$ gilt.

2. Der Beweis von Lemma 6.4 zeigt, daß alle anderen Polynome in (6.18), die einen Beitrag zum Hauptnenner liefern, Produkte der Form $(1-a_1\, q^k)(1-a_2\, q^{2\,k}) \cdots (1-a_m\, q^{m\,k})$ sind. Wählen wir jeweils das maximale m für alle Produktfolgen mit dem Faktor $(1 - a_1\, q^k)$, so sind offenbar alle solche „kleineren Produktfolgen“ mit ebendiesen Faktor in der maximalen enthalten.

Mit Hilfe der einfachen Abschätzung

$$(x\, i + y\, j)^{+} \;\le\; (x)^{+}\, i + (y)^{+}\, j, \qquad i, j \in \mathbb{N}_0,\, x, y \in \mathbb{Z},$$

erhalten wir folgende Schranke für den Grad Ω des Hauptnenners:

$$\begin{aligned}\Omega \quad \le \quad & I \sum_{l=1}^{r}\left((b_l + e_l)^{-}(\beta_l)^{-} + (b_l + e_l)^{+}(\beta_l)^{+} + (e_l)^{-}(\varepsilon_l)^{+} + (e_l)^{+}(\varepsilon_l)^{-}\right) + \\ & I \sum_{l=1}^{s}\left((v_l + g_l)^{-}(\gamma_l)^{+} + (v_l + g_l)^{+}(\gamma_l)^{-} + (g_l)^{-}(\varrho_l)^{-} + (g_l)^{+}(\varrho_l)^{+}\right) + \\ & J \sum_{l=1}^{r}\left((a_l + d_l)^{-}(\beta_l)^{-} + (a_l + d_l)^{+}(\beta_l)^{+} + (d_l)^{-}(\varepsilon_l)^{+} + (d_l)^{+}(\varepsilon_l)^{-}\right) + \\ & J \sum_{l=1}^{s}\left((u_l + f_l)^{-}(\gamma_l)^{+} + (u_l + f_l)^{+}(\gamma_l)^{-} + (f_l)^{-}(\varrho_l)^{-} + (f_l)^{+}(\varrho_l)^{+}\right) + \\ & (\zeta)^{+}\, I + (\eta)^{+}\, J.\end{aligned} \tag{6.22}$$

Bringen wir nun alle Summanden der linken Seite von Gleichung (6.18) auf diesen Hauptnenner, so können wir den Grad des jeweiligen Zählers mittels $\nu_{i,j} + \Omega - \delta_{i,j}$ abschätzen. Vereinfacht man zunächst $\nu_{i,j} - \delta_{i,j}$ unter Verwendung von $(z)^{+} - (z)^{-} = z$, so erhält man:

$$\begin{aligned}\nu_{i,j} - \delta_{i,j} \;=\; & \sum_{l=1}^{r}\left(\lambda_{i,j}^{(l)}\,(\beta_l)^{+} - \lambda_{i,j}^{(l)}\,(\beta_l)^{-} + \mu_{i,j}^{(l)}\,(\varepsilon_l)^{-} - \mu_{i,j}^{(l)}\,(\varepsilon_l)^{+}\right) + \\ & \sum_{l=1}^{s}\left(\varphi_{i,j}^{(l)}\,(\gamma_l)^{-} - \varphi_{i,j}^{(l)}\,(\gamma_l)^{+} + \psi_{i,j}^{(l)}\,(\varrho_l)^{+} - \psi_{i,j}^{(l)}\,(\varrho_l)^{-}\right) + \\ & \deg_{q^k}\left(P(q^n, q^k)\right) - (\zeta\, i + \eta\, j).\end{aligned} \tag{6.23}$$

Da für $x \in \mathbb{Z}$ und $i, I \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq I$ stets

$$(x)^- I + x\, i \leq |x|\; I, \qquad (x)^+ I - x\, i \leq |x|\; I \qquad \text{und} \qquad (x)^- + (x)^+ = |x|$$

gilt, folgt durch Addition von Gleichung (6.22) und (6.23):

$$\begin{aligned}
\nu_{i,j} + \Omega - \delta_{i,j} \;&\leq I \left(\sum_{l=1}^{r} \big(|b_l + e_l|\; |\beta_l| + |e_l|\; |\varepsilon_l| \big) + \sum_{l=1}^{s} \big(|v_l + g_l|\; |\gamma_l| + |g_l|\; |\varrho_l| \big) + |\zeta| \right) + \\
&\quad J \left(\sum_{l=1}^{r} \big(|a_l + d_l|\; |\beta_l| + |d_l|\; |\varepsilon_l| \big) + \sum_{l=1}^{s} \big(|u_l + f_l|\; |\gamma_l| + |f_l|\; |\varrho_l| \big) + |\eta| \right) + \\
&\quad \deg_{q^k}\Big(P(q^n, q^k) \Big) \\
&= \Phi\, I + \Psi\, J + \Xi.
\end{aligned}$$

D. h. das zu lösende lineare Gleichungssystem für die $\sigma_{i,j}(n)$, $i = 0, \ldots, I$ und $j = 0, \ldots, J$, besteht aus höchstens $\Phi\, I + \Psi\, J + \Xi + 1$ Gleichungen. Da wir jedoch $(I+1)\,(J+1)$ Variablen haben, existiert garantiert eine nichttriviale Lösung, sofern nur

$$(I+1)\,(J+1) \;>\; \Phi\, I + \Psi\, J + \Xi + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad I\,(J+1) \;>\; \Phi\, I + (\Psi - 1)\, J + \Xi$$

gilt. Eine mögliche Lösung dieser Ungleichung erhalten wir nun, indem wir $J = \Phi$ wählen. Dann ist die obige Ungleichung offenbar äquivalent zu $I > \Phi\,(\Psi - 1) + \Xi$. □

Lemma 6.6 *Sei $F(n,k)$ eine gewöhnliche q-hypergeometrische Funktion. Dann gibt es ein $J \in \mathbb{N}$ und Polynome $\sigma_j(n), j = 0, \ldots, J$, die nicht alle identisch Null sind, sowie eine gewöhnliche q-hypergeometrische Funktion $G(n,k)$ äquivalent zu $F(n,k)$ mit*

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j, k) \;=\; G(n, k+1) - G(n,k). \tag{6.24}$$

Beweis: Sei $F(n,k)$ gewöhnlich q-hypergeometrisch. Gemäß Satz 6.5 existiert dann eine k-freie Rekursion

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} \tilde{\sigma}_{i,j}(n)\, F(n-j, k-i) = 0$$

mit $\tilde{\sigma}_{i,j}(n) \in \mathbb{F}[q^n]$ für alle $i = 0, \ldots, I$ und $j = 0, \ldots, J$. Unter diesen wähle eine, so daß I minimal ist. Mit Hilfe der Shiftoperatoren[28] $\mathcal{S}_n$ und $\mathcal{S}_k$ definieren wir den Operator H durch

$$H\,(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n) \;=\; \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} \tilde{\sigma}_{i,j}(n)\, {\mathcal{S}_n}^j\, {\mathcal{S}_k}^i.$$

[28]Siehe Definition 3.1, Seite 17

Da das Polynom $H(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n) - H(\mathcal{S}_n, \mathrm{Id}, n)$ an der Stelle $\mathcal{S}_k = \mathrm{Id}$ eine Nullstelle hat, gibt es ein Polynom $\tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n) \neq 0$, welches o. B. d. A. ungleich Null ist,[29] mit

$$H(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n) = H(\mathcal{S}_n, \mathrm{Id}, n) - (\mathcal{S}_k - \mathrm{Id})\, \tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)$$

und

$$\deg_{\mathcal{S}_k}\big(\tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)\big) = \deg_{\mathcal{S}_k}\big(H(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)\big) - 1.$$

Setze nun $G(n,k) := \tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)\, F(n,k)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= H(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)\, F(n,k) \\ &= H(\mathcal{S}_n, \mathrm{Id}, n) F(n,k) - (\mathcal{S}_k - \mathrm{Id})\, \tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)\, F(n,k) \\ &= \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} \tilde{\sigma}_{i,j}(n)\, \mathcal{S}_n{}^j F(n,k) - (\mathcal{S}_k - \mathrm{Id}) G(n,k). \end{aligned}$$

Definieren wir nun $\sigma_j(n) := \sum_{i=0}^{I} \tilde{\sigma}_{i,j}(n)$ für $j = 0, \dots, J$, so erhalten wir die Rekursion

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n-j, k) = G(n, k+1) - G(n,k).$$

Bleibt also nur noch zu zeigen, daß nicht alle $\sigma_j(n)$ identisch Null sind. Angenommen, sie wären alle identisch Null, so folgte aufgrund der letzten Gleichung $G(n,k+1) = G(n,k)$, d. h. $G(n,k)$ wäre unabhängig von k. Mit

$$\frac{V(n)}{W(n)} := \frac{G(n+1,k)}{G(n,k)} \in \mathbb{F}(q^n)$$

wäre dann aber

$$\big(V(n) - W(n)\, \mathcal{S}_n\big)\, \tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)\, F(n,k) = 0,$$

also $\big(V(n) - W(n)\, \mathcal{S}_n\big)\, \tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)$ ein Operatorpolynom vom Grad $(I-1)$ bzgl. $\mathcal{S}_k$, das $F(n,k)$ annulliert – ein Widerspruch zur Minimalität von I. □

6.3 Creative Symmetrizing

Schon im hypergeometrischen Fall liefert Zeilbergers Algorithmus nicht immer eine Rekursion minimaler Ordnung. Dieses Problem tritt auch im q-Fall auf, wobei von P. Paule 1994 in [Pau94] eine Methode veröffentlicht wurde, die dieses Problem in vielen Fällen beheben kann.[30] Laut P. Paule sind dabei im q-Fall insbesondere mehr „Standardidentitäten“ befallen. Hierfür wollen wir ein Beispiel betrachten.

[29] Ist $\tilde{H}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n) = 0$, so muß $H(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_k, n)$ unabhängig von $\mathcal{S}_k$ sein. Somit haben wir bereits eine Rekursion der Form (6.24), mit $G(n,k) = 0$.

[30] M. Petkovšek übertrug diese Methode dann auf den hypergeometrischen Fall, siehe [PWZ96].

Beispiel 6.7: Ist $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, so gilt nach L. J. Rogers die Identität

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k\, q^{k\,(3\,k-1)/2}}{(q;q)_{n+k}\,(q;q)_{n-k}} \quad = \quad \frac{1}{(q;q)_n}. \tag{6.25}$$

Wendet man auf die linke Seite nun den q-Zeilberger-Algorithmus an, so stellt man fest:

1. Eine Rekursion 1. Ordnung wird nicht gefunden, da in diesem Fall 0 und -1 der einzige mögliche untere bzw. obere Grad von $X(k)$ sein kann.

2. Auch eine Rekursion 2. Ordnung verfehlt der Algorithmus, wobei hier allerdings $X(k)$ als Polynom 1. Grades angesetzt wird, das zu lösende Gleichungssystem dann jedoch keine Lösung hat.

Erst bei Ordnung 3 liefert der Algorithmus die Rekursion:

$$\begin{aligned} q\left(q^n-1\right)\left(q^n+1\right)\left(q^{2\,n}-q\right)S(n) \;+\; \left((q+1)\,q^{3\,n}+q^2\,q^{2\,n}-q^2-q^3-q^4)\right)S(n-1) \;+\; \\ q\left(q^{2\,n}+q^2+q^3+q^4\right)S(n-2) \;-\; q^5\,S(n-3) \quad = \quad 0, \end{aligned} \tag{6.26}$$

mit dem *Zertifikat* $Z(n,k) = q^{3\,n-3\,k+1}\left(q^{n+k}-1\right)\left(q^{3\,k}-q^{n+2\,k}-q^{n+k}+q\right)$. ♢

Um nun die Rekursionsordnung zu verkleinern, hatte Paule die Idee, den Summanden in einen „geraden und ungeraden Anteil“ aufzuspalten und anschließend zur Bestimmung der Summe nur den geraden Teil zu verwenden. Das folgende einfache Lemma ist dafür die Basis:

Lemma 6.8 *Seien $\lambda, \mu, c \in \mathbb{Z}$ und $F(k)$ ein q-hypergeometrischer Term bzgl. k. Gilt nun $F(k) = R(k)\,F(\lambda+\mu+c-k)$ und*

$$0 \;=\; \begin{cases} \sum\limits_{k=\lambda}^{\lambda+c-1} F(k) \;-\; \sum\limits_{k=\mu+1}^{\mu+c} F(k), & \textit{falls } c \ge 0, \\ \sum\limits_{k=\mu+c+1}^{\mu} F(k) \;-\; \sum\limits_{k=\lambda+c}^{\lambda+c-1} F(k), & \textit{falls } c < 0, \end{cases}$$

so folgt

$$\sum_{k=\lambda}^{\mu} F(k) \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{k=\lambda}^{\mu}\left(R(k)+1\right)F(k). \tag{6.27}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=\lambda}^{\mu} F(k) \;&=\; \sum_{k=\lambda}^{\mu}\left(F(k)+F(\lambda+\mu+c-k)\right) \;+\; \sum_{k=\lambda}^{\mu}\left(F(k)-F(\lambda+\mu+c-k)\right) \\ &=\; \sum_{k=\lambda}^{\mu}\left(R(k)+1\right)F(k) \;+\; \sum_{k=\lambda}^{\mu} F(k) \;-\; \sum_{k=\lambda}^{\mu} F(k+c) \\ &=\; \sum_{k=\lambda}^{\mu}\left(R(k)+1\right)F(k) \;+\; \begin{cases} \sum\limits_{k=\lambda}^{\lambda+c-1} F(k) \;-\; \sum\limits_{k=\mu+1}^{\mu+c} F(k), & \text{falls } c \ge 0, \\ \sum\limits_{k=\mu+c+1}^{\mu} F(k) \;-\; \sum\limits_{k=\lambda+c}^{\lambda+c-1} F(k), & \text{falls } c < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bei der Anwendung von Lemma 6.8 beschränkt man sich auf den Fall $R(k) \in \mathbb{F}\big(q^k\big)$. Durch eine geschickte Wahl von c kann man oft eine sehr simple Funktion $R(k)$ erzeugen.[31] Hierbei impliziert die Existenz mehrerer möglicher c oft, daß der Summand außerhalb der Summationsgrenzen ganz oder teilweise verschwindet.

Erstaunlicherweise liefert der q-Zeilberger-Algorithmus angewandt auf die Summe der rechten Seite von Gleichung (6.27) oft eine Rekursion kleinerer Ordnung als bei Verwendung des ursprünglichen Summanden. Dies wollen wir am Beispiel 6.26 nachvollziehen. Hier ist $\lambda = -n$, $\mu = n$. Wählen wir nun $c = 0$, so folgt $R_n(k) = q^k$. Wendet man nun den q-Zeilberger-Algorithmus auf die Summe

$$S(n) \;=\; \sum_{k=-n}^{n} \frac{q^k+1}{2}\,\frac{(-1)^k\,q^{k\,(3\,k-1)/2}}{(q;q)_{n+k}\,(q;q)_{n-k}}$$

an, so erhält man sofort die gewünschte Rekursion

$$\big(q^n-1\big)\,S(n) \;-\; S(n-1) \;=\; 0,$$

die man mit Hilfe des einfachen rationalen Zertifikates $Z(n,k) = q^{-k}$ beweisen kann.

In Abschnitt 7.2 werden wir noch eine alternative Methode betrachten, mit der man alle **q**-hypergeometrischen Lösungen einer Rekursion bestimmen kann. Diese ist jedoch i. a. relativ langsam und bietet sich insofern eher für Probleme an, die mit „Creative Symmetrizing“ nicht gelöst werden können.

[31] Für eine ausführlichere Diskussion, siehe [Rie95].

7 q-hypergeometrische Lösungen von Rekursionen

Wie wir bereits gesehen haben, liefert der q-Zeilberger-Algorithmus nicht notwendigerweise eine Rekursion minimaler Ordnung. Es existieren jedoch Algorithmen zur Bestimmung aller q-hypergeometrischen Lösungen einer homogenen oder inhomogenen Rekursionsgleichung.

7.1 Polynomlösungen

Aufgrund der einfachen Shift-Struktur im q-Fall können wir gleich nach endlichen Laurentpolynomlösungen suchen. Die Vorgehensweise ist dabei analog zu der, wie wir sie bereits beim **q**-Gosper-Algorithmus kennengelernt haben: Im ersten Schritt erfolgt die Bestimmung einer Gradschranke, und in einem zweiten Schritt wird die Rekursion unter Verwendung dieser Gradschranke gelöst.

Lemma 7.1 *Sei* $J \in \mathbb{N}$ *und* $L(n), B(n), \sigma_0(n), \ldots \sigma_J(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, {q_1}^{-n}, \ldots, {q_m}^n, {q_m}^{-n}]$ *mit*

$$\sigma_j(n) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^m} s_{j,\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \textit{für } j = 0, \ldots, J.$$

Ferner sei $\prec$ *eine Monomordnung auf* $\mathbb{F}[{q_1}^n, {q_1}^{-n}, \ldots, {q_m}^n, {q_m}^{-n}]$ *und*[32]

$$\boldsymbol{\epsilon} \;=\min\big\{\text{multildeg}(\sigma_j(n)) \;\big|\; j = 0, \ldots, J\big\},$$

$$\boldsymbol{\delta} \;=\max\big\{\text{multideg}(\sigma_j(n)) \;\big|\; j = 0, \ldots, J\big\},$$

sowie $\boldsymbol{\lambda} = \text{multildeg}(B(n))$ *und* $\boldsymbol{\mu} = \text{multideg}(B(n))$. *Gilt nun*

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, L(n+j) \;=\; B(n), \tag{7.1}$$

so folgt für $\boldsymbol{\phi} = \text{multildeg}(L(n))$ *bzw* $\boldsymbol{\psi} = \text{multideg}(L(n))$*:*

(i) $\Big(\big(B(n) \neq 0\big) \wedge \big(\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\epsilon}\big)\Big)$ *oder* $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\phi}}$ *ist Nullstelle von* $S(x) = \sum_{j=0}^{J} s_{j,\boldsymbol{\epsilon}} \cdot x^j \in \mathbb{F}[x]$,

(ii) $\Big(\big(B(n) \neq 0\big) \wedge \big(\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\delta}\big)\Big)$ *oder* $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\psi}}$ *ist Nullstelle von* $S(x) = \sum_{j=0}^{J} s_{j,\boldsymbol{\delta}} \cdot x^j \in \mathbb{F}[x]$.

Beweis: Seien alle Voraussetzungen des Lemmas sowie die entsprechenden Bezeichnungen gegeben. Ferner gelte

$$L(n) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Z}^m} p_{\boldsymbol{\beta}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\beta}} \qquad \text{und} \qquad B(n) \;=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^m} b_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Dann folgt aus der Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^m} b_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{j=0}^{J} \left[\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^m} s_{j,\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\alpha}\right)\left(\sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Z}^m} p_{\boldsymbol{\beta}} \left(\mathbf{q}^{n+j}\right)^{\boldsymbol{\beta}}\right)\right] \\ &=\; \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^m} \Bigg(\underbrace{b_{\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{j=0}^{J}\sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Z}^m} s_{j,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \cdot p_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{q}^{j\,\boldsymbol{\beta}}}_{=:\, D(\boldsymbol{\alpha})}\Bigg) \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

[32] Das folgende Minimum bzw. Maximum soll bzgl. dieser Ordnung $\prec$ gebildet werden.

D. h. alle Koeffizienten von $(\mathbf{q}^n)^{\boldsymbol{\alpha}}$ in Gleichung (7.2) müssen verschwinden. Behauptung (*ii*) des Lemmas folgt nun durch Betrachtung von $D(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi})$ bzw. $D(\boldsymbol{\mu})$:

(*i*) $\underline{(\boldsymbol{\mu} \prec \boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi}) \ \vee \ (B(n)=0)}$: Aufgrund von

$$b_{\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi}} = 0, \quad (\boldsymbol{\beta} \prec \boldsymbol{\psi} \implies s_{j,\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\beta}} = 0) \qquad \text{und} \qquad (\boldsymbol{\psi} \prec \boldsymbol{\beta} \implies p_{\boldsymbol{\beta}} = 0),$$

folgt aus Gleichung (7.2) für $D(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi})$

$$0 \;=\; D(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi}) \;=\; \sum_{j=0}^{J} \sum_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{Z}^m} s_{j,\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\beta}} \cdot p_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{q}^{j\,\boldsymbol{\beta}} \;=\; \sum_{j=0}^{J} s_{j,\boldsymbol{\delta}} \cdot p_{\boldsymbol{\psi}} \cdot \left(\mathbf{q}^{\boldsymbol{\psi}}\right)^j.$$

Wegen $p_{\boldsymbol{\psi}} \neq 0$ ist somit $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\psi}}$ eine Nullstelle des Polynoms $S(x) = \sum_{j=0}^{J} s_{j,\boldsymbol{\delta}} \cdot x^j$.

(*ii*) $\underline{(\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi} \leqq \boldsymbol{\mu}) \ \wedge \ (B(n)\neq 0)}$: Nach Definition ist $b_{\boldsymbol{\mu}} \neq 0$, also muß $\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\mu}$ sein, da ansonsten gemäß (7.1) $D(\boldsymbol{\mu})$ ungleich Null ist.

Durch Betrachtung von $D(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\phi})$ bzw. von $D(\boldsymbol{\mu})$ erhalten wir völlig analog Behauptung (*i*). □

Mit Hilfe dieser Gradschranke könnten wir nun analog zum Gosper-Algorithmus ein generisches Laurentpolynom mit noch unbekannten Koeffizienten in die Rekursionsgleichung einsetzen und anschließend das lineare Gleichungssystem

$$\operatorname{coeff}\left(\sum\nolimits_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, L(n+j) - B(n), \left(q^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}}\right) \;=\; 0, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^m,$$

lösen.

Dieses Verfahren hat jedoch einen gravierenden Nachteil: Ist der untere Grad sehr viel kleiner als der obere Grad, so entsteht ein Gleichungssystem mit sehr vielen Variablen. In [ABP95] wird jedoch ein alternativer Algorithmus angegeben, der dieses Problem u. U. umgeht. Die zugrundeliegende Idee ist dabei, die Rekursion für das Polynom in eine Rekursion für dessen Koeffizienten bezüglich einer geeigneten Polynombasis (z. B. Monome) umzuwandeln, um mit dieser möglichst viele Koeffizienten zu berechnen. Entsprechend dem Artikel [ABP95] wollen wir nun das *allgemeinere* Problem, Polynomlösungen linearer Operatorgleichungen zu bestimmen, betrachten.

7.1.1 Polynomlösungen linearer Operatorgleichungen

Sei also $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik 0 und $\mathcal{L} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ eine lineare Abbildung. Ferner bezeichne von nun an $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Polynombasis von $\mathbb{K}[x]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(PB1) $P_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit $\deg(P_n(x)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(PB2) Es existieren $A, B \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha_{-A}(x), \ldots, \alpha_B(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit

$$\mathcal{L}P_n(x) = \sum_{i=-A}^{B} \alpha_i(n)\, P_{n+i}(x), \quad \text{wobei } \alpha_{-A}(x) \neq 0 \neq \alpha_B(x). \tag{7.3}$$

Zudem wollen wir von nun an stets annehmen, daß

$$P_{-n}(x) = 0, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{7.4}$$

gilt. Mit Hilfe der Eigenschaft (PB2) folgt nun für $F(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, P_n(x) \in \mathbb{K}[x]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}F(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left(f_n \sum_{i=-A}^{B} \alpha_i(n)\, P_{n+i}(x) \right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\sum_{i=-A}^{B} \alpha_i(n-i)\, f_{n-i} \right) P_n(x). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Gilt nun für $F(x)$ und $R(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r_n\, P_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ die Gleichung

$$\mathcal{L}F(x) \;=\; R(x), \tag{7.6}$$

so folgen durch Koeffizientenvergleich aus Gleichung (7.5) und (7.6) sowie einer Umkehrung der Summationsreihenfolge bzgl. i ($i \to -i$) die zu (7.6) äquivalenten Gleichungen

$$\sum_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n+i)\, f_{n+i} \;=\; r_n, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}_0$ mit $\deg(F(x)) \leq N$. Dann gilt $N + B \geq \deg(R(x))$, da ansonsten für $n = \deg(R(x))$ in Gleichung (7.7) die linke Seite identisch Null wäre, die rechte Seite aber ungleich Null.

Ist nun $n > N + B$, so folgt $n - B > N$, d. h. alle Summanden auf der linken Seite von Gleichung (7.7) verschwinden. Wegen $n > N + B \geq \deg(R(x))$ verschwindet aber auch die rechte Seite, so daß folgende zwei Bedingungen äquivalent zu Gleichung (7.7) sind:

(i) $\sum\limits_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n+i)\, f_{n+i} \;=\; r_n, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, N + B,$

(ii) $f_n = 0, \quad \text{für } n = N+1, N+2, \ldots.$

D. h. um eine Lösung von Gleichung (7.6) zu erhalten, können wir folgendermaßen vorgehen:

1. Bestimmung einer Basis von Vektoren $\{\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \ldots, \mathbf{V}^{(t)}\}$[33] des Untervektorraumes von $\mathbb{K}^{N+A+B+1}$, erzeugt durch das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n+i)\, v_{n+i} \;=\; 0, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, N + B \text{ und } v_i = 0 \text{ für } i < 0, \tag{7.8}$$

sowie die Berechnung einer speziellen Lösung $\mathbf{G} = (g_0, g_1, \ldots, g_{N+A+B}) \in \mathbb{K}^{N+A+B+1}$ des inhomogenen Systems

$$\sum_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n+i)\, g_{n+i} \;=\; r_n, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, N + B. \tag{7.9}$$

[33] $\mathbf{V}^{(j)} = (v_0^{(j)}, v_1^{(j)}, \ldots, v_{N+A+B}^{(j)})$ für $j = 1, 2, \ldots, t$.

2. Einschränkung der allgemeinen Lösung $(s_0, \ldots, s_{N+A+B}) := c_1\,\mathbf{V}^{(1)} + \cdots + c_t\,\mathbf{V}^{(t)} + \mathbf{G}$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems $\{s_n = 0 \mid n = N+1, \ldots, N+A+B\}$ nach $\{c_1, \ldots, c_t\}$.

3. Falls im vorigen Schritt eine Lösung existiert, ist $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} s_i\,x^i$ eine allgemeine Lösung von Gleichung (7.6).

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von Gleichung (7.8) können wir also zunächst A beliebige Anfangswerte vorgeben.[34] Also wählen wir o. B. d. A. für $i = 1, 2, \ldots, A-1$ den i-ten Einheitsvektor $\mathbf{E}_i$

$$\mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{E}_i := (\delta_{0,i-1}, \delta_{1,i-1}, \ldots, \delta_{N+A+B,i-1}), \quad \text{wobei } \delta_{j,i} = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases},$$

sowie $g_i = 0$. Mit Hilfe der Rekursion können wir nun für $n = A, A+1, \ldots, N+A+B$ die letzten $N+B+1$ Komponenten der Vektoren $\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \ldots, \mathbf{V}^{(A-1)}$ bestimmen. D. h. für $n = A, \ldots, N+A+B$ berechnen wir $v_n^{(i)}$ und g_n aus den vorigen $A+B$ Komponenten, sofern $\alpha_{-A}(n) \neq 0$:

$$v_n^{(i)} \;=\; \frac{-1}{\alpha_{-A}(n)} \sum_{j=1}^{A+B} \alpha_{j-A}(n-j)\, v_{n-j}^{(i)} \tag{7.10}$$

und

$$g_n \;=\; \frac{1}{\alpha_{-A}(n)} \left(r_{n-A} - \sum_{j=1}^{A+B} \alpha_{j-A}(n-j)\, g_{n-j} \right). \tag{7.11}$$

Treffen wir auf eine Singularität ($\alpha_{-A}(n) = 0$), so wandeln wir die Berechnung leicht ab. Zunächst einmal tun wir so, als wäre die $(n{+}1)$-te Komponente beliebig zu wählen, fügen also zu unserer bisherigen Basis den Vektor $\mathbf{E}_{n+1}$ hinzu und setzen die entsprechende Komponente in allen bisherigen Basisvektoren auf Null (auch in der speziellen Lösung $\mathbf{G}$).

Somit haben wir am Ende einen Satz von Vektoren $\mathbf{G}, \mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \ldots, \mathbf{V}^{(t)}$,

$$t \;=\; \Big| \{0, 1, \ldots, A-1\} \cup \big\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \alpha_{-A}(n) = 0 \;\wedge\; A \leq n \leq N+A+B \big\} \Big| \in \mathbb{N}_0, \tag{7.12}$$

so daß $\mathbf{V}$ mit

$$\mathbf{V} = \mathbf{G} + \sum_{j=1}^{t} c_j\,\mathbf{V}^{(j)}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_t \in \mathbb{K} \text{ beliebig} \tag{7.13}$$

die allgemeine Lösung des Systems (7.9) ist, sofern

$$\mathcal{Z} := \big\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; \alpha_{-A}(n) = 0 \;\wedge\; A \leq n \leq N+A+B \big\} = \emptyset. \tag{7.14}$$

[34] Obwohl hier eine Rekursion $(A{+}B)$-ter Ordnung vorliegt sind nur A Anfangswerte beliebig, da ja noch die Nebenbedingung $v_{-B} = v_{-B+1} = \cdots = v_{-1} = 0$ erfüllt sein muß.

Gilt $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, so kann es sein, daß Gleichung (7.7) an der Stelle $n = n_0 - A, n_0 \in \mathcal{Z}$ von der allgemeinen Lösung $\mathbf{V}$ *nicht* erfüllt wird. Andererseits sieht man aber sofort, daß $\mathbf{V}$ die allgemeine Lösung ist, falls zusätzlich die $|\mathcal{Z}|$ Bedingungen

$$\sum_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n_0 - A + i) \cdot \left(g_{n_0-A+i} + \sum_{i=1}^{t} c_i\, v_{n_0-A+i}^{(i)} \right) = r_{n_0-A}, \quad \text{für alle } n_0 \in \mathcal{Z} \tag{7.15}$$

gelten. D. h. im Falle $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ müssen wir die $c_1, c_2, \ldots, c_t$ noch so wählen, daß sie die Gleichungen (7.15) erfüllen.[35] Bleibt also noch der zweite Schritt: Hier werden die $c_1, c_2, \ldots, c_t$ noch durch die $A + B + 1$ Gleichungen

$$g_n + \sum_{i=1}^{t} c_i\, v_n^{(i)} = 0, \quad \text{für alle } n = N, N+1, \ldots, N+A+B \tag{7.16}$$

weiter eingeschränkt. Existieren also $c_1, c_2, \ldots, c_t \in \mathbb{K}$, so daß sowohl (7.15) als auch (7.16) gilt, so ist $\mathbf{V}$ die allgemeine Lösung[36] des inhomogenen Systems (7.9)[37]. Das im 3. Schritt definierte $F(x)$ ist dann eine Lösung der Operatorgleichung (7.6). Erfüllen keine $c_1, c_2, \ldots, c_t$ die entsprechenden Gleichungen, so existiert keine Lösung von (7.6).

Nun wollen wir die Problemstellung noch auf den q-Zeilberger-Algorithmus verallgemeinern: D. h. zu $l \in \mathbb{N}$ suchen wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ und $F(x) \in \mathbb{K}[x]$, so daß $F(x)$ eine Lösung der Gleichung

$$\mathcal{L}F(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\, R^{(i)}(x) \tag{7.17}$$

ist, wobei $R^{(1)}(x), \ldots, R^{(l)}(x) \in \mathbb{K}[x]$ gegeben sind. Hierfür variieren wir den Algorithmus geringfügig, indem wir die Linearität des Operators $\mathcal{L}$ nutzend anstatt nach einer speziellen Lösung $\mathbf{G}$ zu suchen, nun $\mathbf{G}^{(1)}, \ldots, \mathbf{G}^{(l)}$ bestimmen, so daß jeweils

$$\sum_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n+i)\, g_{n+i}^{(j)} = r_n^{(j)}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, N+B \text{ und } j = 1, \ldots, l \tag{7.18}$$

gilt. Ansonsten ersetzen wir die Bedingung (7.15) durch

$$\sum_{i=-B}^{A} \left[\alpha_{-i}(n_0 - A + i) \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j\, g_{n_0-A+i}^{(j)} + \sum_{j=1}^{t} c_j\, v_{n_0-A+i}^{(j)} \right) \right] = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j\, r_{n_0-A}^{(j)}, \quad n_0 \in \mathcal{Z} \tag{7.19}$$

und (7.16) durch

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j\, g_n^{(j)} + \sum_{j=1}^{t} c_j\, v_n^{(j)} = 0, \qquad \text{für alle } n = N, N+1, \ldots, N+A+B. \tag{7.20}$$

[35]Beachte, daß in diesem Fall die zunächst bestimmten Vektoren $\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \ldots, \mathbf{V}^{(t)}$ bzw. $\mathbf{G}$ nicht notwendigerweise eine Lösung des homogenen Systems (7.8) bzw. des inhomogenen Systems (7.9) sein müssen.

[36]wobei einige c_i noch beliebig sein können

[37]Unter Umständen ist $t = 0$, so daß lediglich noch die Bedingung $g_n = 0$ für $n = N, N+1, \ldots, N+A+B$ überprüft werden muß.

Gesucht sind nun $c_1, c_2, \ldots, c_t \in \mathbb{K}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$, so daß diese Gleichungen erfüllt sind. Existieren solche, so ist offenbar

$$F(x) := \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i=1}^{t} c_i \, v_n^{(i)} \; + \; \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \, g_n^{(i)} \right) P_n(x) \tag{7.21}$$

die allgemeine Lösung von (7.17).

Algorithmus 7.1 ABPsolve

Input: Rekursionsgleichung (7.17), sowie $\alpha_{-A}(x), \ldots, \alpha_B(x)$ gemäß Gleichung (7.3).
Output: Eine allgemeine Lösung von Gleichung (7.17).

$\mathcal{Z} := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \alpha_{-A}(n) = 0\}$;
$v_n^{(i)} := 0$ für $i = 1, \ldots, |\{0, 1, \ldots, A-1\} \cup \mathcal{Z}|$ und $n = -A-B, \ldots, -1$;
$g_n^{(i)} := 0$ für $i = 1, \ldots, l$ und $n = -A-B, \ldots, N+A+B$;
$t := 0$;
for $n := 0$ **to** $N+A+B$ **do**
  if $(n < A)$ **or** $(n \in \mathcal{Z})$ **then**
    $t := t+1$;
    $v_j^{(t)} := 0$ für $j = 0, \ldots, N+A+B$;
    $v_n^{(t)} := 1$;
    $v_n^{(j)} := 0$ für $j = 1, \ldots, t-1$;
  else

$$v_n^{(i)} := \frac{-1}{\alpha_{-A}(n)} \sum_{j=1}^{A+B} \alpha_{i-A}(n-i) \, v_{n-j}^{(i)}, \quad \text{für } i = 1, \ldots, t;$$

$$g_n^{(i)} := \frac{1}{\alpha_{-A}(n)} \left(r_{n-A}^{(j)} - \sum_{j=1}^{A+B} \alpha_{i-A}(n-i) \, g_{n-j}^{(i)} \right), \quad \text{für } i = 1, \ldots, l;$$

  end if;
end for;

$$\mathcal{E} := \left\{ \sum_{i=-B}^{A} \left[\alpha_{-i}(n-A+i) \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \, g_{n-A+i}^{(j)} \; + \; \sum_{j=1}^{t} c_j \, v_{n-A+i}^{(j)} \right) \right] \; = \; \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \, r_{n-A}^{(j)} \;\middle|\; n \in \mathcal{Z} \right\};$$

$$\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \left\{ \sum_{i=1}^{t} c_i \, v_n^{(i)} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \, g_n^{(i)} \; = \; 0 \;\middle|\; n = N+1, \ldots, N+A+B \right\};$$

if $(\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_t, \lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{K}$: Lösung von $\mathcal{E})$ **then**

$$F(x) := \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{i=1}^{t} c_i \, v_n^{(i)} \; + \; \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \, g_n^{(i)} \right) P_n(x);$$

  return $F(x)$;
else
  return „Keine Lösung existiert.";
end if

Offenbar hängt der Algorithmus entscheidend von der Wahl der Polynombasis $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ab. Insbesondere muß diese bei gegebenem Operator $\mathcal{L}$ auch das Axiom (PB2) (siehe Seite 61) erfüllen, was eine erhebliche Einschränkung darstellt. Zudem möchte man möglichst wenig Gleichungen lösen. Die Singularitätenmenge $\mathcal{Z}$ sollte also leer sein. Im folgenden werden wir nun für einige Polynombasen die entsprechende Rekursionsgleichung (7.3) berechnen.

7.1.2 Differenzengleichungen

Hierfür wollen wir als Beispiel zunächst den q-Fall verlassen und den Operator $\mathcal{L} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ mit

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(x)\, {\Delta_x}^j, \quad \text{wobei } \sigma_0(x), \ldots, \sigma_J(x) \in \mathbb{K}[x] \tag{7.22}$$

betrachten. Als erstes fallen uns natürlich die Monome x^n als mögliche Polynombasis ein. Hier ist jedoch das Problem, daß das Bild $\mathcal{S}_x x^n$,

$$\mathcal{S}_x x^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

zu viele Basispolynome zur Darstellung benötigt, wodurch im allgemeinen (PB2) nicht erfüllt werden kann. Andererseits bieten sich die fallenden Faktoriellen $x^{\underline{n}} = x\,(x-1)\cdots(x-n+1)$ an, da für diese gilt:

$$\Delta_x x^{\underline{n}} \;=\; (x+1)\prod_{j=0}^{n-2}(x-j) \;-\; (x-n+1)\prod_{j=0}^{n-2}(x-j) \;=\; n\, x^{\underline{n-1}}.$$

Per Induktion erhalten wir somit ${\Delta_x}^k x^{\underline{n}} = n^{\underline{k}}\, x^{\underline{n-k}}$, für $k \in \mathbb{N}$. Durch eine Normierung der fallenden Faktoriellen, die auf die Binomialkoeffizienten führt, erhalten wir die noch simplere Formel

$${\Delta_x}^k \binom{x}{n} \;=\; {\Delta_x}^{k-1}\left(\binom{x+1}{n} - \binom{x}{n}\right) \;=\; {\Delta_x}^{k-1}\binom{x}{n-1} \;=\; \cdots \;=\; \binom{x}{n-k}. \tag{7.23}$$

In [ABP95] schlagen die Autoren als Basis $P_n(x) = \binom{x-\nu}{n}$ vor, wobei

$$\nu := \max\left\{x \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \sigma_J(x) = 0\right\} + 1. \tag{7.24}$$

Durch diesen Shift bzgl. x erhält man eine Polynombasis, für die zusätzlich $\mathcal{Z} = \emptyset$ gilt, wie wir sehen werden.

Für diese Basis wollen wir nun die Rekursion (7.3) bestimmen. Hierfür benötigen wir folgende Variante der Chu-Vandermonde Identität (2.37):

$$\binom{x}{n} \;=\; \sum_{i=n}^{m+n} \binom{x-m}{i-m}\binom{m}{m+n-i}. \tag{7.25}$$

Multiplizieren wir Gleichung (7.25) mit $\binom{x}{m}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\binom{x}{m}\binom{x}{n} \;&=\; \sum_{i=n}^{m+n} \frac{x!}{m!\,(x-m)!}\,\frac{(x-m)!}{(i-m)!\,(x-i)!}\,\frac{m!}{(m+n-i)!\,(i-n)!} \\
&=\; \sum_{i=n}^{m+n} \frac{x!}{i!\,(x-i)!}\,\frac{i!}{m!\,(i-m)!}\,\frac{m!}{(i-n)!\,(m+n-i)!},
\end{aligned}$$

woraus wir eine Summendarstellung für das Produkt zweier Basispolynome schließen können:

$$P_m(x)\, P_n(x) \;=\; \sum_{i=n}^{m+n} \binom{i}{m} \binom{m}{i-n} P_i(x). \tag{7.26}$$

Gilt nun für $j = 0, 1, \ldots, J$

$$\sigma_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k^{(j)}\, P_k(x) \qquad \text{und} \qquad d = \max\left\{\deg(\sigma_j(x)) \,\middle|\, j = 1, 2, \ldots, J\right\}, \tag{7.27}$$

so folgt für $\mathcal{L}P_n(x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}P_n(x) &\overset{(7.23)}{=} \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(x)\, P_{n-j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{J}\sum_{m=0}^{d} s_m^{(j)}\, P_m(x)\, P_{n-j}(x) \\
&\overset{(7.26)}{=} \sum_{j=0}^{J}\sum_{m=0}^{d} s_m^{(j)} \sum_{i=n-j}^{m+n-j} \binom{i}{m} \binom{m}{i-n+j} P_i(x) \\
&= \sum_{i=n-J}^{d+n} \left[\sum_{j=0}^{J}\sum_{m=0}^{d} s_m^{(j)} \binom{i}{m} \binom{m}{i-n+j}\right] P_i(x).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir nun in der letzten Gleichung die Summationsvariable i durch $n+i$ und vergleichen anschließend diese Rekursion mit (7.3), so sehen wir, daß $A = J$, $B = d$ und

$$\alpha_i(n) \;=\; \sum_{j=0}^{J}\sum_{m=0}^{d} s_m^{(j)} \binom{n+i}{m} \binom{m}{i+j}, \quad \text{für } i = -J, J+1, \ldots, d. \tag{7.28}$$

Nun wollen wir noch zeigen, daß $\mathcal{Z} = \emptyset$, m. a. W. daß $\alpha_{-J}(n+J) \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $J \le n \le N + J + d$:

$$\alpha_{-J}(n+J) = \sum_{j=0}^{J}\sum_{m=0}^{d} s_m^{(j)} \binom{n+J-J}{m} \binom{m}{J-j} = \sum_{m=0}^{d} s_m^{(J)} \binom{n}{m} = \sigma_J(n+\nu) \overset{(7.24)}{\neq} 0.$$

7.1.3 q-Differenzengleichungen

Im folgenden wollen wir den q-Fall betrachten, d. h. gegeben sei der Operator $\mathcal{L}$ mit

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(k)\, {\mathcal{S}_k}^j \quad \text{wobei } \sigma_0(k), \ldots, \sigma_J(k) \in \mathbb{F}\left[q^k\right]. \tag{7.29}$$

Im Gegensatz zum vorher betrachteten Beispiel erweisen sich hier die Monome $\left(q^k\right)^n$ als geeignete Polynombasis. Sei also jetzt $P_n(k) = \left(q^k\right)^n$ und gelte ferner (7.27). Dann folgt für

$\mathcal{L}P_n(k)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}P_n(k) &= \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(k)\, q^{n\,j}\, P_n(k) \\
&= \sum_{j=0}^{J} \sum_{i=0}^{d} s_i^{(j)}\, q^{n\,j}\, P_{n+i}(k) \\
&= \sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{j=0}^{J} s_i^{(j)}\, q^{n\,j} \right) P_{n+i}(k).
\end{aligned}$$

Vergleichen wir nun diese Rekursion mit (7.3), so erhalten wir hier $A = 0$, $B = d$ und

$$\alpha_i(k) = \sum_{j=0}^{J} s_i^{(j)}\, q^{n\,j} \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, d. \tag{7.30}$$

Leider verhindert diese einfache Basis aber nicht das Auftreten von Singularitäten in $\alpha_0(n)$. Bisher ist im q-Fall jedoch keine Basis bekannt, die $\mathcal{Z} = \emptyset$ garantiert.

7.2 q-hypergeometrische Lösungen

Bevor wir ein Lösungsverfahren zur Bestimmung q-hypergeometrischer Lösungen einer homogenen Rekursionsgleichung angeben, wollen wir zunächst noch die Definition der kanonischen $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellung erweitern:

Definition 7.2 *Das Quadrupel $\big(z, P(n), Q(n), R(n)\big)$ heißt eine (kanonische) $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellung von $L(n) \in \mathbb{F}(q_1{}^n, \ldots, q_m{}^n)$, falls $z \in \mathbb{F}$, $Q(n)$ monisch und $\big(P(n), z\,Q(n), R(n)\big)$ eine (kanonische) $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellung von $L(n)$ ist.*

Lemma 7.3 *Sei $F(n)$ ein $\mathbf{q}$-hypergeometrischer Term bzgl. n mit der kanonischen $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellung $\big(z, P(n), Q(n), R(n)\big)$. Ferner sei $J \in \mathbb{N}$, $\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}[q_1{}^n, \ldots, q_m{}^n]$ und für $j = 0, \ldots, J$*

$$C_j(n) := \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^m} c_{j,\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\alpha} := \sigma_j(n) \prod_{i=0}^{j-1} Q(n+i) \prod_{i=j}^{J-1} R(n+i) \in \mathbb{F}[q_1{}^n, \ldots, q_m{}^n].$$

Gilt nun für $F(n)$ die Rekursionsgleichung $\sum\limits_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n+j) = 0$, so ist $Q(n)$ ein Teiler von $\sigma_0(n)$ und $R(n)$ ein Teiler von $\sigma_J(n-J+1)$. Zudem gelten die Polynomgleichungen

$$\sum_{j=0}^{J} c_{j,\boldsymbol{\rho}}\, z^j = 0, \qquad \boldsymbol{\rho} = \min\left\{ \operatorname{multildeg}(C_j(n)) \;\middle|\; j = 0, \ldots, J \right\} \tag{7.31}$$

und

$$\sum_{j=0}^{J} C_j(n)\, z^j\, P(n+j) = 0. \tag{7.32}$$

Beweis: Seien die Bezeichnungen entsprechend dem Lemma sowie alle Voraussetzungen erfüllt. Teilen wir nun die Rekursionsgleichung durch $F(n)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n) \prod_{i=0}^{j-1} \frac{F(n+i+1)}{F(n+i)} \\ &= \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, z^j\, \frac{P(n+j)}{P(n)} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{Q(n+i)}{R(n+i)}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $P(n) \prod_{i=0}^{J-1} R(n+i)$ erhalten wir:

$$\sum_{j=0}^{J} z^j \left(\sigma_j(n) \prod_{i=0}^{j-1} Q(n+i) \prod_{i=j}^{J-1} R(n+i) \right) P(n+j) \quad = \quad 0. \tag{7.33}$$

Nun besitzen für $j = 1, \dots, J$ alle Summanden in (7.33) den Faktor $Q(n)$, wodurch

$$Q(n) \quad \text{teilt} \quad \sigma_0(n)\, P(n) \prod_{i=0}^{J-1} R(n+i)$$

folgt. Aufgrund von Lemma 3.7 (**q**GR2) sind $Q(n)$ und $R(n+i)$ teilerfremd für alle $i \in \mathbb{N}_0$, sowie wegen (**q**GR3) $Q(n)$ und $P(n)$. D. h. es muß gelten

$$Q(n) \quad \text{teilt} \quad \sigma_0(n).$$

Analog taucht für $j = 0, \dots, J-1$ in allen Summanden von (7.33) $R(n+J-1)$ als expliziter Faktor auf, so daß

$$R(n) \quad \text{teilt} \quad \sigma_J(n-J+1)\, P(n+1) \prod_{i=0}^{J-1} Q(n-i)$$

gilt, wodurch wir mit Hilfe von Lemma 3.7 (**q**GR2) und (**q**GR4) schließen:

$$R(n) \quad \text{teilt} \quad \sigma_J(n-J+1).$$

Um die letzte Aussage des Lemmas zu beweisen, definieren wir

$$P(n) =: \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^m} p_{\boldsymbol{\alpha}} \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Hiermit können wir Gleichung (7.33) folgendermaßen umschreiben:

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^m} \left(\sum_{j=0}^{J} c_{j,\boldsymbol{\alpha}}\, p_{\boldsymbol{\beta}}\, z^j\, \mathbf{q}^{j\,\boldsymbol{\beta}} \right) \left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} \;=\; 0.$$

Offensichtlich müssen alle Koeffizienten von $\left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}$ identisch Null sein. Betrachten wir den Koeffizienten von $\left(\mathbf{q}^n\right)^{\boldsymbol{\rho}}$, so erhalten wir:

$$0 = \sum_{j=0}^{J} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^m \\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\rho}}} c_{j,\boldsymbol{\alpha}}\, p_{\boldsymbol{\beta}}\, z^j\, \mathbf{q}^{j\,\boldsymbol{\beta}} = \underbrace{\sum_{j=0}^{J} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^m \\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\rho}}} c_{j,\boldsymbol{\alpha}}\, p_{\boldsymbol{\beta}}\, z^j\, \mathbf{q}^{j\,\boldsymbol{\beta}}}_{=\,0,\ \text{da } c_{j,\boldsymbol{\alpha}} = 0 \text{ für } \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\rho}.} + \sum_{j=0}^{J} c_{j,\boldsymbol{\rho}}\, p_{\mathbf{0}}\, z^j \tag{7.34}$$

Gemäß Lemma 3.7 ($\mathbf{q}$GR6) ist aber $\operatorname{multildeg}(P(k)) = \mathbf{0}$, d. h. $p_0 \neq 0$. Entsprechend Gleichung (7.34) folgt also (7.31). □

Angenommen, wir wollen nun eine $\mathbf{q}$-hypergeometrische Lösung $F(n)$ einer gegebenen Rekursionsgleichung finden, so können wir mittels des Lemmas deren kanonische q-Gosper-Darstellung bzw. den Quotienten $F(n+1)/F(n)$ bestimmen. Aus diesem läßt sich selbstverständlich eine Darstellung des $\mathbf{q}$-hypergeometrischen Terms $F(n)$ konstruieren, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

Zuvor wollen wir jedoch die eben erarbeitete Lösung noch einmal algorithmisch formulieren:

Algorithmus 7.2 $\mathbf{q}$-Petkovšek

Input: $J \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n) = 0, \quad$ mit $\sigma_j(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$.
Output: Menge aller q-hypergeometrischen Lösungen der Rekursion.

$\mathcal{Q} := \left\{Q(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n] \;\middle|\; Q(n) \text{ teilt } \sigma_0(n),\ Q(n) \text{ monisch}\right\}$
$\mathcal{R} := \left\{R(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n] \;\middle|\; R(n) \text{ teilt } \sigma_J(n-J+1),\ R(n) \text{ monisch}\right\}$
$\mathcal{F} := \{\}$
for $Q(n) \in \mathcal{Q}$ **do**
  for $R(n) \in \mathcal{R}$ **do**
    $\mathcal{Z} := \left\{z \;\middle|\; z \text{ ist Lösung von Gleichung (7.31)}\right\}$
    for $z \in \mathcal{Z}$ **do**
      $\mathcal{P} := \left\{P(n) \;\middle|\; P(n) \text{ ist Lösung von Gleichung (7.32)}\right\}$
      for $P(n) \in \mathcal{P}$ **do**
        $V(n) := \dfrac{P(n+1)}{P(n)} \dfrac{Q(n)}{R(n)}\, z$
        $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \left\{F(n) \;\middle|\; F(n+1) = V(n)\, F(n),\ F(n)\ \mathbf{q}\text{-hypergeometrisch}\right\}$
      end for
    end for
  end for
end for
return $\mathcal{F}$

Algorithmisch stellt sich hier die Frage nach einer effizienten Implementierung dieses Verfahrens. Folgende Möglichkeiten können dazu beitragen:

- Da der Algorithmus die kanonischen $\mathbf{q}$-Gosper-Darstellungen aller möglichen Lösungen der gegebenen Rekursion bestimmt, könnte man deren Eigenschaften nutzen. So bräuchte man z. B. keine Kombination von $Q(n)$ und $R(n)$ testen, für die ein $j \in \mathbb{N}_0$ existiert mit
$$\gcd(Q(n), R(n+j)) \neq 1.$$
- Sehr viel effizienter scheint jedoch die folgende Methode zu sein. Sie basiert auf der Beobachtung, daß die Menge $\mathcal{Z} = \left\{z \;\middle|\; z \text{ ist Lösung von Gleichung (7.31)}\right\}$ meist sehr viel weniger Elemente enthält, wenn wir diese in Äquivalenzklassen einteilen, wobei
$$z \sim \tilde{z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \mathbf{q}^{\boldsymbol{\alpha}}\, \tilde{z}, \quad \text{für ein } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^m,$$

für $z, \tilde{z} \in \mathbb{F}$.[38] Anschließend testet man nur für *einen* Repräsentanten, ob eine Polynomlösung $P(n)$ existiert. Dies ist legitim, da für $z = q^{\boldsymbol{\alpha}}\,\tilde{z}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^m$, gilt:

$$z\,\frac{P(n+1)}{P(n)}\,\frac{Q(n)}{R(n)} \;=\; \tilde{z}\,q^{\boldsymbol{\alpha}}\,\frac{P(n+1)}{P(n)}\,\frac{Q(n)}{R(n)} \;=\; \tilde{z}\,\frac{\tilde{P}(n+1)}{\tilde{P}(n)}\,\frac{Q(n)}{R(n)},$$

wobei $\tilde{P}(n) = \big(q^n\big)^{\boldsymbol{\alpha}}\,P(n)$ sei. Hierdurch ist der zwar der der untere Multigrad von $P(k)$ nicht mehr notwendigerweise gleich Null, aber $P(n)$ bleibt monisch.[39] Insofern können wir den höchsten Koeffizienten stets mit 1 ansetzen.

In der Praxis stellte sich bei vielen Beispielen heraus, daß diese Methode die Rechenzeit oft um mehr als die Hälfte verkürzt.

- Testet man für eine bestimmte Wahl von $Q(n)$ und $R(n)$, ob die entsprechende Rekursionsgleichung (7.32) eine Lösung $P(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, {q_1}^{-n}, \ldots, {q_m}^n, {q_m}^{-n}]$ besitzt, indem man zunächst mittels Lemma 7.1 mögliche Grade berechnet, so ist es offenbar günstig, zuerst den oberen Grad zu testen. Denn bei einer homogenen Rekursionsgleichung kann man so u. U. sofort feststellen, daß keine Lösung existiert.[40]

- Im Gegensatz zu dem algemeinem Prinzip des *Vermeidens überflüssiger Rechnungen* stößt man bei der Implementierung in MAPLE V (Release 4) auf einige sprachspezifische Optimierungsmöglichkeiten. So ist es z. B. günstiger, die Koeffizienten der Rekursion in einer `table` zu speichern, da der Zugriff auf die Rekursion mittels `coeff` deutlich langsamer ist.

  Bei der Bestimmung von Nullstellen erweist sich MAPLEs `solve` oft als ineffizient, da anscheinend das Polynom zuerst expandiert wird. Dies ist unverständlich, und beispielsweise führt der Aufruf `solve((x-a)^100,x);` zu kuriosen Rechenzeiten. Insbesondere scheint es hier günstiger zu sein, die Polynome zuerst zu faktorisieren (oft sind diese schon teilweise faktorisiert) und dann `solve` auf die einzelnen Faktoren (ohne deren Multiplizitäten!) anzuwenden.

7.2.1 Homogene Zwei-Term-Rekursionen

Im folgenden wollen wir uns dem speziellen Problem der Bestimmung q-hypergeometrischer Lösungen von Zwei-Term-Rekursionen widmen. Gegeben sei also eine Rekursionsgleichung der Form

$$F(n+\delta) \;=\; V(n)\,F(n), \qquad \text{mit } \delta \in \mathbb{N},\ V(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big), \tag{7.35}$$

[38] Als ich versuchte die Rechenzeiten komplizierter Beispiele zu verkürzen und mir die Menge $\mathcal{Z}$ anschaute, fiel mir die besondere Struktur auf, die dieses Vorgehen nahelegte.

[39] Zudem gilt nur noch $P(n) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^n, {q_1}^{-n}, \ldots, {q_m}^n, {q_m}^{-n}\right]$, so daß es nicht mehr genügt, nur nach *Polynomlösungen* $P(n)$ von (7.32) zu suchen.

[40] Dies ist der Fall, wenn das in Lemma 7.1 für den oberen Grad definierte Polynom $S(x)$ keine entsprechenden Nullstellen aufweist.

und gesucht sei eine q-hypergeometrische Lösung $F(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ist $\delta > 1$, so wird es i. A. keine q-hypergeometrische Lösung geben, aber zumindest eine der Form

$$F(n) = \begin{cases} F_0(n), & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{\delta}, \\ F_1(n), & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{\delta}, \\ \vdots & \vdots \\ F_{\delta-1}(n), & \text{falls } n \equiv \delta - 1 \pmod{\delta}, \end{cases} \tag{7.36}$$

wobei $F_0(n), \ldots F_{\delta-1}(n)$ q-hypergeometrische Terme sind. Um solch eine Lösung zu bestimmen, wollen wir zunächst zwei einfache Spezialfälle betrachten, die uns dann zu einer Lösung für beliebige $V(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big)$ führen werden. Seien dementsprechend $n, \nu, \varrho \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu < n$ und $\varrho < \delta$, so folgt:

(i) $\underline{V(n) = a\left(q^n\right)^\lambda + b,\ \lambda \in \mathbb{N} \text{ und } a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}:}$

$$\begin{aligned} F(\delta\, n + \varrho) &= \Big(a\left(q^\lambda\right)^{\delta\,(n-1)+\varrho} + b\Big) \cdot F(\delta\,(n-1) + \varrho) \\ &= \Big(a\left(q^\lambda\right)^{\delta\,(n-1)+\varrho} + b\Big) \cdot \Big(a\left(q^\lambda\right)^{\delta\,(n-2)+\varrho} + b\Big) \cdot F(\delta\,(n-2) + \varrho) \\ &\vdots \\ &= F(\delta\,\nu + \varrho) \cdot \prod_{j=0}^{n-\nu-1} \Big[a\left(q^\lambda\right)^{\delta\,(j+\nu)+\varrho} + b\Big], \end{aligned}$$

bzw.

$$F(\delta\, n + \varrho) = b^{n-\nu} \cdot \Big(-\frac{a}{b}\, q^{\lambda\,(\delta\,\nu+\varrho)}; q^{\lambda\,\delta}\Big)_{n-\nu} \cdot F(\delta\,\nu + \varrho). \tag{7.37}$$

(ii) $\underline{V(n) = c\left(q^n\right)^\omega,\ c \in \mathbb{F} \text{ und } \omega \in \mathbb{Z}:}$

$$F(n\,\delta + \varrho) = F(\delta\,\nu + \varrho) \cdot \prod_{j=\nu}^{n-1} \Big[c\left(q^\omega\right)^j\Big] = c^{n-\nu} \cdot q^{\omega\,\left[\binom{n}{2} - \binom{\nu}{2}\right]} \cdot F(\delta\,\nu + \varrho). \tag{7.38}$$

Ist ein beliebiges $V(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big)$ gegeben, so spalten wir dieses auf in Faktoren von Typ (i) und (ii). Unter Umständen ist dies über $\mathbb{F}$ unmöglich, so daß wir einen Erweiterungskörper $\tilde{\mathbb{F}}$ betrachten müssen, über dem wir Linearfaktoren finden. Damit erhalten wir

$$V(n) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{r} \Big(a_i\left(q^n\right)^{\lambda_i} + b_i\Big)}{\prod\limits_{i=1}^{s} \Big(d_i\left(q^n\right)^{\mu_i} + e_i\Big)}\, c\left(q^n\right)^\omega, \tag{7.39}$$

wobei $r, s \in \mathbb{N}_0$ sowie für $i = 1, 2, \ldots, r$ bzw. $j = 1, 2, \ldots, s$

$$\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad c, a_i, b_i, d_j, e_j \in \tilde{\mathbb{F}} \setminus \{0\} \tag{7.40}$$

sind. Problematisch sind lediglich noch die Nullstellen des Nenners von $V(n)$. Diese vermeiden wir jedoch einfach, indem wir eine Lösung konstruieren, die erst ab einem gewissen $\nu_\varrho \in \mathbb{N}_0$ gültig ist. Also definieren wir für $\varrho = 0, 1, \ldots, \delta - 1$ mit

$$\nu_\varrho := \min\left\{ n_0 \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \left(d_j \left(q^{\delta\, n+\varrho}\right)^{\mu_j} + e_j\right) \neq 0, \text{für alle } j = 1, 2, \ldots, s \text{ und } n \geq n_0 \right\}. \quad (7.41)$$

Offenbar gilt $\nu_\varrho \in \mathbb{N}_0$, und wir erhalten mittels (i) und (ii) als Lösung der Rekursion (7.35) mit (7.39) für $\varrho = 0, 1, \ldots, \delta - 1$ und $n \geq \nu_\varrho$

$$F(\delta\, n + \varrho) \;=\; \frac{c^n\, q^{\omega \binom{n}{2}}}{c^{\nu_\varrho}\, q^{\omega \binom{\nu_\varrho}{2}}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{r} b_i^{n-\nu_\varrho} \left(-\frac{a_i}{b_i}\, q^{\lambda_i\, (\delta\, \nu_\varrho + \varrho)}; q^{\lambda_i\, \delta}\right)_{n-\nu_\varrho}}{\prod\limits_{i=1}^{s} e_i^{n-\nu_\varrho} \left(-\frac{d_i}{e_i}\, q^{\mu_i\, (\delta\, \nu_\varrho + \varrho)}; q^{\mu_i\, \delta}\right)_{n-\nu_\varrho}} F(\delta\, \nu_\varrho + \varrho). \quad (7.42)$$

7.3 Inhomogene Rekursionsgleichungen

Im folgenden wollen wir **q**-hypergeometrische Lösungen inhomogener Rekursionsgleichungen ermitteln, wobei sich dieses Problem sofort auf das Auffinden rationaler Lösungen reduzieren läßt.

Lemma 7.4 *Sei $J \in \mathbb{N}$, $\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}\left[{q_1}^k, \ldots, {q_m}^k\right]$ und $G(n)$ ein* **q***-hypergeometrischer Term ungleich Null bzgl. n, $\gamma(n) = G(n+1)/G(n)$. Ist nun $F(n)$ eine (bzgl. n)* **q***-hypergeometrische Lösung der inhomogenen Rekursionsgleichung*

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n+j) \;=\; G(n),$$

so ist $V(n) := F(n)/G(n) \in \mathbb{F}({q_1}^n, \ldots, {q_m}^n)$ und erfüllt die Rekursionsgleichung

$$\sum_{j=0}^{J} \left(\sigma_j(n) \prod_{i=0}^{j-1} \gamma(n+i) \right) V(n+j) \;=\; 1. \quad (7.43)$$

Beweis: Man sieht sofort, daß $\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n+j)$ ein in ${q_1}^n, \ldots, {q_m}^n$ rationales Vielfaches von $F(n)$ sein muß, wodurch die erste Aussage folgt.

Gleichung (7.43) erhalten wir, indem wir die Rekursionsgleichung für $F(n)$ durch $G(n)$ teilen. □

Um rationale Lösungen von (7.43) zu finden, bestimmen wir ein Vielfaches des Nenners von $V(n)$ und transformieren anschließend die Rekursion (7.43) für $V(n)$ in eine für den Zähler von $V(n)$. Im Gegensatz zum homogenen Fall, der vielfach beschrieben wurde, wird im inhomogenen Fall meist auf Arbeiten von S. A. Abramov verwiesen (siehe [Abr],[Abr95]), dessen Ansatz wir nachvollziehen wollen.

Definition 7.5 *Sei $P(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$* **q***-monisch, d. h. der Absolutkoeffizient von $P(n)$ sei eins. Dann heißt $P(n)$* speziell, *wenn ein irreduzibles Polynom $p(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$ und $h, \gamma_0, \ldots, \gamma_h \in \mathbb{N}_0$ existieren, so daß*

$$P(n) \;=\; p(n)^{\gamma_0}\, p(n+1)^{\gamma_1} \cdots p(n+h)^{\gamma_h} \quad (7.44)$$

gilt. Ist $p(n+v)^\delta$ ein nichttrivialer Teiler von $P(n)$, so heißt er *(i) kritisch 1. Art, falls für alle* $p(n+\tilde{v})^{\tilde{\delta}} \mid P(n)$ *aus* $\tilde{v} > v$ *stets* $\tilde{\delta} < \delta$ *folgt,*

(ii) kritisch 2. Art, falls für alle $p(n+\tilde{v})^{\tilde{\delta}} \mid P(n)$ *aus* $\tilde{v} < v$ *stets* $\tilde{\delta} < \delta$ *folgt.*

Seien $p(n+a_1)^{\alpha_1}, \ldots, p(n+a_r)^{\alpha_r}$ *mit* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$ *alle kritischen Teiler 1. Art von* $P(n)$*, sowie* $p(n+b_1)^{\beta}, \ldots, p(n+b_r)^{\beta_s}$ *alle kritischen Teiler 2. Art mit* $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s$*. Dann heißt* $P(n)$ *beschränkt durch* $\big(A(n), B(n)\big) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]^2$ *falls*

$$
\begin{aligned}
&p(n+a_i)^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \quad \text{teilt} \quad A(n), \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots, r \text{ und} &(7.45)\\
&p(n+b_j)^{\beta_j - \beta_{j-1}} \quad \text{teilt} \quad B(n), \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots, s &(7.46)
\end{aligned}
$$

gilt, wobei $\alpha_0 = 0$ *und* $\beta_0 = 0$ *sei.*

Mit anderen Worten, ein Teiler $p(n+v)^{\delta}$ des Polynoms $P(n)$ ist

- kritisch 1. Art, falls es unmöglich ist, σ zu vergrößern ohne δ zu verkleinern,
- kritisch 2. Art, falls es unmöglich ist, v zu verkleinern ohne δ zu verkleinern.

So ist z. B. in Gleichung (7.44) der Faktor $p(n)^{\gamma_0}$ kritisch 2. Art und $p(n+h)^{\gamma_h}$ kritisch 1. Art.

Beispiel 7.6: Ist

$$P(n) = \left(1-q^k\right)^2 \left(1-q^{k+1}\right)^5 \left(1-q^{k+2}\right)^2 \left(1-q^{k+3}\right)^3 \left(1-q^{k+4}\right)^2,$$

so sind $\left(1-q^{k+1}\right)^5$, $\left(1-q^{k+3}\right)^3$ und $\left(1-q^{k+4}\right)^2$ alle kritischen Teiler 1. Art, sowie $\left(1-q^k\right)^2$ und $\left(1-q^{k+1}\right)^5$ alle kritischen Teiler 2. Art. Dementsprechend ist $P(n)$ beschränkt durch

$$\Big(\left(1-q^{k+1}\right)^2 \left(1-q^{k+3}\right) \left(1-q^{k+4}\right)^2,\ \left(1-q^{k+1}\right)^3 \left(1-q^k\right)^2\Big).$$

$\diamondsuit$

Satz 7.7 *Seien* $\sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$*,* $V(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big)$ *und* $X(n)/P(n)$ *eine teilerfremde Darstellung von* $V(n)$*, wobei* $P(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$ $\mathbf{q}$*-monisch und* $X(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, {q_1}^{-n}, \ldots, {q_m}^n, {q_m}^{-n}]$ *sei. Ist nun*

$$\mathcal{L} := \sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, {\mathcal{S}_n}^j,$$

$\mathcal{L}V(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$ *und* $P(n)$ *speziell, so ist* $P(n)$ *beschränkt durch* $\big(\sigma_J(n-J), \sigma_0(n)\big)$*.*

Beweis: Es gelten die Voraussetzungen des Lemmas, sowie die Bezeichnungen von Definition 7.5. Definiere

$$\sigma_J(n-J) =: p(n+a_1)^{\delta_1} \cdots p(n+a_r)^{\delta_r}\, f(n),$$

wobei $\delta_0, \ldots, \delta_r \in \mathbb{N}_0$ und $f(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$ teilerfremd zu allen kritischen Faktoren 1. Art sei. Zunächst wollen wir die Gültigkeit von Bedingung (7.45) zeigen. Für $i = 1, 2, \ldots, r$ muß $\alpha_i - \alpha_{i-1} \le \delta_i$ sein.

Angenommen, dies wäre nicht der Fall, d. h. es gäbe ein $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ mit $\alpha_i - \delta_i > \alpha_{i-1}$. Dann definieren wir $\mathcal{J} = \{0, \dots, J\}$, $\mathcal{H} = \{0, \dots, h\}$ und stellen $V(n)$ mittels folgender Partialbruchzerlegung dar:

$$V(n) \;=\; \frac{w_{-1}(n)}{(q^n)^{\mathrm{multideg}(X(n))}} + \sum_{k=0}^{h} \frac{w_k(n)}{p(n+k)^{\gamma_k}}, \tag{7.47}$$

wobei $w_{-1}(n), \dots, w_h(n) \in \mathbb{F}[q^n]$ und $\gcd(w_k(n), p(n+k)) = 1$ für alle $k \in \mathcal{H}$. Auf diese wenden wir nun den linearen Operator $\mathcal{L}$ an und erhalten so

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(n) \;&=\; \sum_{j=0}^{J} \frac{\sigma_j(n)\, w_{-1}(n+j)}{(q^{n+j})^{\mathrm{multideg}(X(n))}} + \sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{h} \frac{\sigma_j(n)\, w_k(n+j)}{p(n+j+k)^{\gamma_k}} \\ &=\; \sum_{j=0}^{J} \frac{\sigma_j(n)\, w_{-1}(n+j)}{(q^{n+j})^{\mathrm{multideg}(X(n))}} + \sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{J}\times\mathcal{H}\\ j+k\neq J+a_i}} \frac{\sigma_j(n)\, w_k(n+j)}{p(n+j+k)^{\gamma_k}} + \\ &\qquad \sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{J}\times\mathcal{H}\\ j+k=J+a_i\\ j\neq J}} \frac{\sigma_j(n)\, w_k(n+j)}{p(n+j+k)^{\gamma_k}} + \left(\frac{w_{a_i}(n+J)\, f(n+J)}{p(n+J+a_i)^{\alpha_i-\delta_i}} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{r} p(n+J+a_l)^{\delta_l}\right).\end{aligned} \tag{7.48}$$

Ferner gilt für

$$j \in \{0, \dots, J-1\} \text{ und } k \in \{0, \dots, h\} \text{ mit } j+k = J+a_i \text{ stets } \gamma_k \leq \alpha_{i-1}. \tag{7.49}$$

Da $k > a_i$ ist und zudem $p(x+a_i)^{\alpha_i}$ ein kritischer Teiler 1. Art ist, muß $\gamma_k < \alpha_i$ sein, wobei $\alpha_i = \gamma_c$ für ein $c \in \{0, \dots, h\}$. Angenommen, $\gamma_k > \alpha_{i-1}$; wähle $l \in \mathbb{N}$ maximal mit $\gamma_l < \alpha_i$. Da $p(x+l)^{\gamma_l}$ kein kritischer Teiler 1. Art ist, muß es also ein $d \in \{l+1, \dots, c-1\}$ geben mit $\gamma_d > \gamma_l$ — ein Widerspruch zur Maximalität von l.

D. h. multiplizieren wir nun Gleichung (7.48) mit allen Nennern der Summanden von Gleichung (7.48), die teilerfremd zu $p(n+J+a_i)$ sind, sowie mit $p(n+J+a_i)^{\alpha_{i-1}}$, so wird die rechte Seite zu einer Summe der echt rationalen Funktion

$$\frac{f(n+J)\, w_{a_i}(n+J)\, D(n)}{p(n+J+a_i)^{\alpha_i-\alpha_{i-1}-\delta_i}} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{r} \sigma_J(n+J+a_k)^{\delta_k}$$

und lauter Polynomen; ein Widerspruch zur Voraussetzung $\mathcal{L}V(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \dots, {q_m}^n]$.

Die Gültigkeit von Bedingung (7.46) folgt aufgrund einer analogen Argumentation. □

Seien $A(n), B(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \dots, {q_m}^n]$ speziell. Dann nennen wir $A(n)$ und $B(n)$ *äquivalent*, falls ihr Produkt wieder speziell ist und schreiben $A(n) \sim B(n)$. Jedes Polynom $P(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \dots, {q_m}^n]$ besitzt offenbar eine Darstellung als Produkt paarweise nicht äquivalenter spezieller Polynome:

$$P(n) \;=\; \prod_{i=1}^{l} P_i(n), \qquad \text{wobei } \gcd(P_j(n), P_k(n+z)) = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{Z},\, k \neq j.$$

Dementsprechend heißt $P(n)$ beschränkt durch $\big(A(n),B(n)\big) \in \mathbb{F}[{q_1}^n,\dots,{q_m}^n]^2$, falls $P_i(n)$ beschränkt ist durch $\big(A(n),B(n)\big)$ für alle $i=1,\dots,l$.

Betrachten wir nun noch einmal den Beweis des letzten Satzes, so stellen wir fest, daß die Anforderung – $P(n)$ speziell – nicht benötigt wird, was wir später noch ausnutzen werden.

Satz 7.8 *Seien $A(n),B(n),P(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n,\dots,{q_m}^n]$, $P(n)$ $\mathbf{q}$-monisch, speziell und beschränkt durch $\big(A(n),B(n)\big)$. Ferner sei $d = \max\big\{0, \mathbf{q}\text{-disp}_n\big(A(n),B(n)\big)\big\}$ und*

$$\begin{aligned} G(n) &= \mathbf{q}\text{-gcd}\big(A(n),B(n+d)\big),\\ \tilde{P}(n) &= P(n)/\mathrm{gcd}\Big(P(n), \textstyle\prod_{i=0}^{d} G(n+i)\Big),\\ \tilde{A}(n) &= A(n)/G(n),\\ \tilde{B}(n) &= B(n)/G(n-d). \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{P}(n)$ beschränkt durch $\big(\tilde{A}(n),\tilde{B}(n)\big)$ und $P(n)$ ein Teiler von $\tilde{P}(n)\prod_{i=0}^{d} G(n+i)$.

Beweis: Die Voraussetzungen des Lemmas sowie die Bezeichnungen von Definition 7.5 seien gültig.

Der letzte Teil der Aussage ist offensichtlich; ist $\mathrm{gcd}(p(n+i),G(n)) = 1$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, so bleibt die „Beschränktheits-Eigenschaft“ erhalten. D. h. wir können unsere Betrachtung auf Faktoren der Art $p(n+i)$, $i \in \mathbb{Z}$ beschränken.

Angenommen, es existiert ein $i \in \mathbb{Z}$, so daß $p(n+i)^\gamma$, $\gamma > 0$ maximal, ein Teiler von $G(n)$ ist. Wegen der Maximalitätseigenschaft der Dispersion folgt, daß

(i) $p(n+k)$ teilt $B(n+d)$ stets $k \geq i$ impliziert und

(ii) $p(n+k)$ teilt $A(n)$ stets $k \leq i$ impliziert.

Zudem ist $p(n+h)$ immer ein Teiler von $A(n)$ und $p(n+d)$ ein Teiler von $B(n+d)$. Also gilt $h \leq i \leq d$, wodurch

$$\tilde{P}(n) \;=\; p(n)^{((\delta_0-\gamma))^+}\, p(n+1)^{((\delta_1-\gamma))^+} \cdots p(n+h)^{((\delta_h-\gamma))^+} \tag{7.50}$$

folgt, so daß in $\tilde{P}(n)$ gegenüber $P(n)$ keine neuen kritischen Teiler 1. oder 2. Art entstehen. Ist $i > h$, so wird weder in $A(n)$ noch in $B(n)$ die Anzahl der kritischen Teiler verändert.

Gilt $i = h$, so wird zwar aus $A(n)$ ein Teil des kritischen Faktors 1. Art $p(n+h)^\gamma$ entfernt (u. U. auch der ganze), der gleiche Faktor wird allerdings auch in $\tilde{P}(n)$ weggekürzt.

Das gleiche gilt auch für $B(n)$, wobei hier für $i < d$ nicht einmal kritische Faktoren 2. Art entfernt werden. □

Mit Hilfe der letzten beiden Sätze können wir nun einen Algorithmus zur Berechnung des Nenners angeben:

Algorithmus 7.3 Berechnung eines Nenners einer rationalen Lösung einer Rekursion

Input: $\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, V(n+j) = C(n)$ mit $C(n), \sigma_0(n), \ldots \sigma_J(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$.

Output: $P(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$, so daß für eine Lösung $V(n) \in \mathbb{F}({q_1}^n, \ldots, {q_m}^n)$ der Rekursion der Nenner von $V(n)$ ein Teiler von $P(n)$ ($\mathbf{q}$-mod ${q_1}^n, \ldots, {q_m}^n$) ist.

$P(n) := 1$;
$A(n) := \sigma_J(n-J)$;
$B(n) := \sigma_0(n)$;
$d := \mathbf{q}\text{-disp}_n\big(A(n), B(n)\big)$;
for $i := d$ **downto** 0 **do**
  $G(n) := \gcd(A(n), B(n+i))$;
  $P(n) := P(n)\ \prod_{i=0}^{d} G(n+i)$;
  $A(n) := A(n)/G(n)$;
  $B(n) := B(n)/G(n-i)$;
end for
return $P(n)$;

Lemma 7.9 *Hat die Rekursion*

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, V(n+j) \;=\; C(n), \qquad C(n), \sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$$

eine Lösung $V(n) \in \mathbb{F}({q_1}^n, \ldots, {q_m}^n)$, *so liefert Algorithmus 7.3 ein Vielfaches des Nenners von* $V(n)$ ($\mathbf{q}$-mod ${q_1}^n, \ldots, {q_m}^n$).

Beweis: Sind $A(n), B(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$ mit $\mathbf{q}\text{-disp}_n\big(A(n), B(n)\big) = -\infty$, so ist 1 das einzige Polynom aus $\mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$ beschränkt durch $\big(A(n), B(n)\big)$.

Aufgrund von Satz 7.7 und 7.8 ist der Algorithmus 7.3 korrekt, sofern der Nenner von $V(n)$ speziell ist. Nun können wir jedoch $V(n)$ darstellen als

$$V(n) \;=\; \sum_{i=1}^{l} \frac{X_i(n)}{P_i(n)}, \quad \text{wobei } P_i(n) \text{ speziell, } P_k(n) \not\sim P_l(n) \text{ für } k \neq l.$$

Gemäß der Bemerkung nach Satz 7.7 sind alle $P_i(n)$ beschränkt durch $\big(\sigma_J(n-J), \sigma_0(n)\big)$. Damit müssen wir also durch Anwendung von Algorithmus 7.3 ein Vielfaches des Nenners von $V(n)$ ($\mathbf{q}$-mod ${q_1}^n, \ldots, {q_m}^n$) erhalten. □

In der Originalarbeit von S. A. Abramov ([Abr95]) ist der Satz 7.8 so formuliert, daß, anstatt $d = \mathbf{q}\text{-disp}_n\big(A(n), B(n)\big)$ maximal zu wählen, $d = \min\big\{j \in \mathbb{N}_0 \;\big|\; q\text{-gcd}\big(A(n), B(n)\big) \neq 1\big\}$ definiert wird. Diese Wahl liefert jedoch in manchen Fällen ein falsches Ergebnis. Während einer Tagung wurde von S. A. Abramov auf diesen Fehler hingewiesen. Die schriftlichen Versionen des Artikels wurden meines Wissens aber bisher leider noch nicht korrigiert.

Notabene: Wählt man d minimal, so erhält man in manchen Fällen einen „kleineren Nenner“. Dieser *kann* u. U. „zu wenig Faktoren“ enthalten. Im Falle einer Rekursion 1. Ordnung wird jedoch auch bei minimaler Wahl von d ein korrektes Ergebnis geliefert.[41] D. h. nur bei einer Rekursion 1. Ordnung darf (und sollte) d minimal gewählt werden. $\triangleleft$

Betrachtet man den Beweis des Satzes (7.8) noch einmal genauer, so beruht dieser auch auf der Tatsache, daß durch die Transformation $P(n) \to \tilde{P}(n)$ keine neuen kritischen Teiler in $\tilde{P}(n)$ entstehen. Diese Aussage kann jedoch falsch sein, sobald d nicht maximal ist:

$$P(n) := \big(q^n+1\big)^2\,\big(q^{n+1}+1\big)^3, \quad A(n) := (q^{n+1}+1)^3, \quad B(n) := \big(q^n+1\big)^2\,\big(q^{n+1}+1\big)^2.$$

Hier ist $\big(q^{n+1}+1\big)^3$ der einzige kritische Teiler 1. Art und $\big(q^n+1\big)^2$, $\big(q^{n+1}+1\big)^3$ sind kritisch 2. Art. D. h. $P(n)$ ist speziell und beschränkt durch $\big(A(n), B(n)\big)$. Wählen wir nun d *minimal*, so erhalten wir mit $d=0$

$$\tilde{P}(n) = \big(q^n+1\big)^2\,\big(q^{n+1}+1\big), \quad \tilde{A}(n) := \big(q^{n+1}+1\big), \quad \tilde{B}(n) := \big(q^n+1\big)^2.$$

Offenbar hat $\tilde{P}(n)$ die kritischen Teiler 1. Art $\big(q^n+1\big)^2$ und $\big(q^{n+1}+1\big)$, d. h. es ist ein neuer hinzugekommen. Wäre der Satz (7.8) *bei minimaler Wahl* von d nun richtig, so müßte $\big(q^n+1\big)$ ein Teiler von $\tilde{A}(n)$ sein. Ausgehend von diesen Überlegungen wollen wir nun folgendes Beispiel betrachten:

Beispiel 7.10: Gesucht ist eine rationale Funktion $V(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big)$, die die inhomogene Rekursion 2. Ordnung

$$\begin{aligned}\big(q^{n+3}+1\big)^3\,V(n+2) \;-\; \big(q^{n+1}+1\big)\,\big(q^{n+2}+1\big)\,\big(q^{3n+5}+2\,q^{2n+3}-1\big)\,V(n+1)&\\ +\;\big(q^n+1\big)^2\,\big(q^{n+1}+1\big)^2\,V(n) \quad&=\quad 1\end{aligned}$$

erfüllt. Algorithmus 7.3 liefert den Nenner $P(n) = (q^n+1)^2\,(q^{n+1}+1)^3$, wobei sich $P(n)^{-1}$ als die einzige Lösung der Rekursion herausstellt.[42]

Verwenden wir Algorithmus 7.3 mit minimalem d, was einem Durchlaufen der **for**-Schleife in umgekehrter Richtung entspricht[43], so erhalten wir den „kleineren" Nenner $P(n) = (q^n + 1)\,(q^{n+1}+1)^3$. Ersetzen wir nun $V(n)$ durch $X(n)/P(n)$ in der Rekursionsgleichung und multiplizieren mit dem Hauptnenner, so gilt

$$\begin{aligned}\big(q^{n+1}+1\big)\,\big(q^{n+2}+1\big)\,X(n+2) \;+\; \big(q^{n+1}+1\big)\,\big(q^{3n+5}+2\,q^{2n+3}-1\big)\,X(n+1)&\\ +\;\big(q^n+1\big)\,\big(q^{n+2}+1\big)^2\,X(n) \quad=\quad \big(q^{n+1}+1\big)\,\big(q^{n+2}+1\big)^2&.\end{aligned}$$

Lemma 7.1 liefert nun mögliche Grade von $X(n)$, wobei mit den Bezeichnungen des Lemmas

$$S(x) = 1 - x + x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad S(x) = q^6\,x$$

für den unteren bzw. oberen Grad folgt. Da diese offenbar nicht zum Grad von $X(k)$ „beitragen können", ergibt sich somit 0 als untere und -1 als obere Gradschranke. D. h. in diesem Falle existiert keine Polynomlösung, was durch die „zu optimistische Wahl" des Nenners verursacht wurde. $\diamondsuit$

[41] Dies wird klar, wenn man Algorithmus 7.3 mit Algorithmus 3.4 zur Berechnung einer **q**-Gosper-Darstellung vergleicht und sich die Beweise im Kapitel 4 noch einmal anschaut.

[42] Lemma 7.1 liefert Null als untere und obere Gradschranke für das entsprechende Zählerpolynom, und nur 1 erfüllt die entsprechende Rekursionsgleichung für das Zählerpolynom.

[43] **for** $i := 0$ **to** d **do**

7.4 Potenzreihen q-hypergeometrischer Terme

In [APP98] zeigen die Autoren, daß sich im q-Fall der Petkovšek-Algorithmus erweitern läßt, um Potenzreihen q-hypergeometrischer Terme als Lösungen von Rekursionslgeichungen zu bestimmen.

Definition 7.11 *Den Ring aller formalen Potenzreihen in q^n, deren Koeffizienten eine q-hypergeometrische Folge bilden, bezeichnen wir mit $\mathbb{F}[[q^n]]$. Für $\nu \in \mathbb{Z}$ setze*

$$\mathbb{F}_\nu[[q^n]] \;=\; \left\{ \sum_{k=\nu}^{\infty} f_k\, z^k \;\middle|\; f_k \textit{ q-hypergeometrisch bzgl. } k \right\}.$$

Wie wir bereit wissen, hat jede homogene Rekursion 1. Ordnung mit Polynomkoeffizienten auch eine q-hypergeometrische Lösung. Eine Potenzreihenlösung existiert jedoch nicht notwendigerweise:

Lemma 7.12 *Die homogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung*

$$F(n+1) \;= V(n)\, F(n), \qquad \textit{mit}\;\; V(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} v_k \left(q^n\right)^k \in \mathbb{F}[[q^n]]$$

hat genau dann eine Lösung $F(n) \in \mathbb{F}[[q^n]] \setminus \{0\}$ wenn $v_0 = q^i$ für ein $\in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Sei $F(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k \left(q^n\right)^k \in \mathbb{F}[[q^n]]$ eine Lösung der Rekursionsgleichung:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k\, q^k \left(q^n\right)^k \;=\; \left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} v_k \left(q^n\right)^k\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k \left(q^n\right)^k\right) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\sum_{i=0}^{k} f_{k-i}\, v_i\right)\left(q^n\right)^k.$$

Koeffizientenvergleich und Subtraktion von $f_k\, v_0$ liefert für $k \in \mathbb{N}_0$

$$f_k\left(q^k - v_0\right) \;=\; \sum_{i=1}^{k} f_{k-i}\, v_i.$$

Gilt $v_0 \neq q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$f_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad f_k \;=\; \frac{1}{q^k - v_0}\sum_{i=1}^{k} f_{k-i}\, v_i,\; k \in \mathbb{N},$$

womit per Induktion $F(n)$ identisch Null sein muß.

Gilt hingegen $v_0 = q^l$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$, so folgt $f_k = 0$ für $k < l$ entsprechend der obigen Argumentation. Somit ist offenbar für jedes $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ die Reihe $F(n)$ mit

$$f_k := \begin{cases} 0, & 0 \le k < l, \\ c, & k = l, \\ \dfrac{1}{q^k - q^l}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_{k-i}\, v_i, & l < k \end{cases}$$

eine nichttriviale Lösung der Rekursionsgleichung ist. □

Suchen wir nun nach Potenzreihenlösungen einer Rekursion, so können wir die gegebene Rekursion in eine für die Koeffizienten der Reihe umwandeln.

Satz 7.13 *Ist* $\nu \in \mathbb{Z}$, $F(n) = \sum_{k=\nu}^{\infty} f_k \left(q^n\right)^k \in \mathbb{F}_\nu[[q^n]]$ *und* $B(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \left(q^n\right)^k \in \mathbb{F}_\nu[[q^n]]$ *mit*

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, F(n) \;=\; B(n), \qquad \textit{wobei}\;\; \sigma_j(n) = \sum_{i=0}^{\delta} s_{j,i} \left(q^n\right)^i \in \mathbb{F}[q^n]$$

für alle $j = 0, 1, \ldots, J$ *und* $\delta = \max\left\{\deg_{q^n}(\sigma_j(n)) \,\middle|\, j = 0, \ldots, J\right\}$, *so erfüllen die Koeffizienten* f_l *für alle* $l \in \mathbb{Z}$ *mit* $l \geq \nu$ *die Rekursionsgleichung*

$$\sum_{i=0}^{\delta} \tilde{\sigma}_i(l)\, f_{l+i} \;=\; b_{l+\delta}, \qquad \tilde{\sigma}_i(l) = \sum_{j=0}^{J} s_{j,\delta-i}\, q^{i\,j} \left(q^l\right)^j \in \mathbb{F}\left[q^l\right] \tag{7.51}$$

und den δ *Anfangsbedingungen* $l = \nu, \nu+1, \ldots, \nu+\delta-1$

$$\sum_{i=0}^{l} \left(\sum_{j=0}^{J} s_{j,l-i}\, q^{i\,j}\right) f_i \;=\; b_l. \tag{7.52}$$

Beweis: Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen des Satzes. Also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \left(q^n\right)^k &= \sum_{j=0}^{J} \left(\sum_{i=0}^{\delta} s_{j,i} \left(q^n\right)^i\right) \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} f_k \left(q^{n+j}\right)^k\right) \\
&= \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=\nu}^{\infty} \sum_{i=\max\{k-\delta,\nu\}}^{k} s_{j,k-i}\, f_i\, q^{i\,j} \left(q^n\right)^k \\
&= \sum_{k=\nu}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{J} \sum_{i=\max\{k-\delta,\nu\}}^{k} s_{j,k-i}\, f_i\, q^{i\,j}\right) \left(q^n\right)^k.
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Setzen wir nun $l := k - \delta$ so folgt durch Koeffizientenvergleich für $k \geq \nu + \delta$:

$$\begin{aligned}
b_{l+\delta} &= \sum_{i=k-\delta}^{k} \sum_{j=0}^{J} s_{j,k-i}\, f_i\, q^{i\,j} \\
&= \sum_{i=0}^{\delta} \left(\sum_{j=0}^{J} s_{j,\delta-i}\, q^{(i+k-\delta)\,j}\right) f_{i+k-\delta} \\
&= \sum_{i=0}^{\delta} \left(\sum_{j=0}^{J} s_{j,\delta-i}\, q^{i\,j} \left(q^l\right)^j\right) f_{l+i}.
\end{aligned}$$

Definieren wir $\tilde{\sigma}_i(l)$ entsprechend dem Lemma, so ist offenbar $\tilde{\sigma}_0(l), \ldots, \tilde{\sigma}_\delta(l) \in \mathbb{F}\left[q^l\right]$. Für $h < \delta$ erhalten wir durch Koeffizientenvergleich aus Gleichung (7.53) dann die Anfangsbedingungen (7.52). □

Im nächsten Abschnitt werden wir diesen Satz für eine Erweiterung des q-Gosper-Algorithmus nutzen.

7.4.1 Erweiterung des q-Gosper-Algorithmus

Bei der Bestimmung von q-hypergeometrischen Stammfunktionen mittels des q-Gosper-Algorithmus taucht ein interessantes Phänomen im Zusammenhang mit dem zugrundeliegenden Körper $\mathbb{F}$ auf:

- Vorhandene Parameter können die Berechnung verhindern.
- Die Ersetzung konkreter Werte durch symbolische Parameter kann aber auch die Berechnung *vereinfachen*.

Bei folgendem Beispiel verursacht ein Parameter das Scheitern des q-Gosper-Algorithmus.

Beispiel 7.14: Betrachte

$$F(k) \;=\; \frac{(q^c;q)_k}{(q;q)_k\, q^{(n+c)\,k}},$$

wobei c und n beliebige Parameter seien. Dann hat der Quotient

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} \;=\; \frac{1-q^c\,q^k}{q^{c+n}\left(1-q\,q^k\right)}$$

die q-Gosper-Darstellung[44]

$$\big(P(k),Q(k),R(k)\big) = \Big(1,\; 1-q^c\,q^k,\; q^{c+n}\left(1-q\,q^k\right)\Big). \tag{7.54}$$

Mittels Lemma (3.13) erhalten wir nun folgende Kandidaten für den unteren bzw. oberen Grad von $X(k)$:

$$\operatorname{ldeg}(X(k)) \in \{0, n+c\} \qquad \text{und} \qquad \deg(X(k)) \in \{-1, n\}. \tag{7.55}$$

Mit anderen Worten: Für beliebige Parameter c und n existiert keine Stammfunktion. $\diamondsuit$

Betrachtet man allerdings die Gradbedingungen, so liegt die Vermutung nahe, daß eventuell für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine Stammfunktion existiert. Mit Hilfe eines Rechners kann man dies für kleine $n \in \mathbb{N}_0$ testen und daraus u. U. eine allgemeine Formel herleiten. Sehr viel effizienter ist jedoch eine Erweiterung des q-Gosper-Algorithmus mittels Satz 7.13. Diese Methode wollen wir an Beispiel 7.14 verdeutlichen.

Sei also nun n eine beliebige natürliche Zahl. Die Rekursionsgleichung für das Polynom $X(k)$, die wir in Beispiel 7.14 zu lösen haben, ist

$$\left(1-q^c\,q^k\right)X(k) \;-\; q^{c+n}\left(1-q^k\right)X(k-1) \;=\; 1. \tag{7.56}$$

Existiert eine Lösung dieser Rekursionsgleichung in $\mathbb{F}\big[q^k, q^{-k}\big]$, so folgt mit der Bedingung (7.55)

$$X(k) \;=\; \sum_{l=0}^{n} f_l\,\left(q^k\right)^l. \tag{7.57}$$

Zur Bestimmung von $X(k)$, bietet sich somit folgendes Vorgehen an:

[44] Diese ist offenbar nicht mehr gültig, sobald man für c Werte aus $\mathbb{N}$ einsetzt.

1. Bestimme mittels Satz 7.13 alle möglichen $X(k) \in \mathbb{F}\big[\big[q^k\big]\big]$, die eine Lösung der Rekursionsgleichung (7.56) sind.
2. Falls eine solche Lösung existiert, überprüfe, ob sich $X(k)$ gemäß (7.57) schreiben läßt.[45] Sollte dies der Fall sein, so haben wir für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ eine Stammfunktion für $F(k)$ gefunden.

Zunächst einmal müssen wir also aus der Rekursion (7.56) für $X(k)$ die assoziierte Rekursion für die Koeffizienten f_l konstruieren[46]:

$$\big(-q^c + q\,q^l\big)\,f_{l+1} \;+\; \big(q^c\,q^n - q^{c+1}\,q^l\big)\,f_l \quad=\quad 0. \tag{7.58}$$

Gesucht ist eine q-hypergeometrische Lösung f_l dieser Rekursion mit der Anfangsbedingung

$$\big(1 - q^{c+n}\big)\,f_0 \;=\; 1. \tag{7.59}$$

Wenden wir Algorithmus 7.2 auf die Rekursionsgleichung (7.58) an, um eine kanonische q-Gosper-Darstellung $\big(z,P(n),Q(n),R(n)\big)$ von f_{l+1}/f_l zu bestimmen, so erhalten wir folgende Teilermengen:

$$\mathcal{Q} = \big\{1,\; q^l - q^n\big\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{R} = \big\{1,\; q^l - q^{c+n-1}\big\}.$$

Für $Q(l) = q^l - q^n$ und $R(l) = q^l - q^{c+n-1}$ erhalten wir mittels Gleichung (7.31) die Anforderung $q^{2\,c+2\,n+1} - z\,q^{c+2\,n+1} = 0$, wodurch $z = q^c$ folgt. Die Bestimmungsgleichung für $P(k)$ ist entsprechend Gleichung (7.32)

$$\begin{aligned}\Big(q^{c+2\,n+1} - \big(q^{n+2} + q^{c+n+1}\big)\,q^l + q^2\,\big(q^l\big)^2\Big)\,q^c\,P(k+1) \;-&\\ \Big(q^{2\,c+2\,n+1} - \big(q^{c+n+2} + q^{2\,c+n+1}\big)\,q^l + q^{c+2}\,\big(q^l\big)^2\Big)\,P(k) \quad&=\quad 0,\end{aligned}$$

wobei sich $P(k) = 1$ als einzig mögliche monische Lösung in $\mathbb{F}\big[q^k, q^{-k}\big]$ erweist. Da alle anderen möglichen Kombinationen von $Q(l)$ und $R(l)$ keine Lösung liefern, ist somit f_l mit

$$\frac{f_{l+1}}{f_l} = q^c\,\frac{q^l - q^n}{q^l - q^{c+n-1}} = q\,\frac{1 - q^{-n}\,q^l}{1 - q^{1-c-n}\,q^l} \qquad \text{bzw.} \qquad f_l = \frac{(q^{-n};q)_l\,q^l}{(q^{1-c-n};q)_l}\,f_0$$

die allgemeine q-hypergeometrische Lösung von (7.58). Dies liefert uns mit der Anfangsbedingung (7.59) eine Potenzreihenlösung von (7.56):

$$X(k) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^l}{1 - q^{c+n}}\,\frac{(q^{-n};q)_l}{(q^{1-c-n};q)_l}\,\big(q^k\big)^l.$$

Für $l > n$ ist jedoch $(q^{-n};q)_l = 0$, so daß der Summand $f_l\,\big(q^k\big)^l$ verschwindet. Dementsprechend ist $X(k)$ ein Polynom n-ten Grades in q^k, und mit Hilfe der q-Gosper-Darstellung (7.54) von $F(k+1)/F(k)$ erhalten wir für

$$F(k) \;=\; \frac{(q^c;q)_k}{(q;q)_k\,q^{(n+c)\,k}}$$

[45] $X(k)$ darf also keine echt unendliche Reihe sein.

[46] Beachte, daß wir hierfür (7.56) in eine aufsteigende Rekursion ($k \to k+1$) transformieren.

eine Stammfunktion gemäß (3.10):

$$\begin{aligned}\sum F(k)\,\delta k &= \frac{R(k-1)\,X(k-1)}{P(k)}\,F(k)\\ &= \frac{q^{c+n}\left(1-q^k\right)}{1-q^{c+n}}\left(\sum_{l=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_l}{(q^{1-c-n};q)_l}\left(q^k\right)^l\right)F(k).\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir ein Beispiel betrachten, in dem erstaunlicherweise die Bestimmung einer Stammfunktion für einen Term mit einem symbolischen Parameter einfacher ist als die Berechnung bei Belegung des Parameters durch natürliche Zahlen.

Beispiel 7.15: Sei

$$F(k) = \frac{(q^n;q)_k}{(q;q)_k\,q^{n\,k}}, \tag{7.60}$$

wobei n zunächst ein beliebiger Parameter sei. Damit folgt für den Quotienten $F(k+1)/F(k)$

$$\frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{1-q^n\,q^k}{q^n-q^{n+1}\,q^k},$$

bzw. dessen q-Gosper-Darstellung $\big(P(k),Q(k),R(k)\big) = \left(1,\,1-q^n\,q^k,\,q^n-q^{n+1}\,q^k\right)$. Somit bleibt also die Bestimmung von $X(k)\in\mathbb{F}\left[q^k\right]$ mit

$$\left(1-q^n\,q^k\right)X(k) - \left(q^n-q^n\,q^k\right)X(k-1) = 1.$$

Lemma (3.13) liefert die Bedingungen $\operatorname{ldeg}(X(k)) = 0$ und $\deg(X(k)) = 0$; das Polynom $X(k) = (1-q^n)^{-1}$ stellt sich als die einzig mögliche Lösung heraus. Mit Gleichung (3.10) erhalten wir eine Stammfunktion für $F(k)$:

$$\sum\frac{(q^n;q)_k}{(q;q)_k\,q^{n\,k}}\,\delta k = \frac{\left(1-q^k\right)q^n}{1-q^n}\,\frac{(q^n;q)_k}{(q;q)_k\,q^{n\,k}}.$$

Ganz anders verläuft die Rechnung, wenn n eine *feste* positive natürliche Zahl ist. Dann ist $\operatorname{disp}_k\big(Q(k),R(k)\big) = n-1\in\mathbb{N}_0$, also $\left(\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-q^{n-j}\,q^k\right),\,1,\,q^n\right)$ eine q-Gosper-Darstellung von $F(k+1)/F(k)$. Bleibt die zu lösende Rekursionsgleichung für $X(k)$:

$$X(k) - q^n\,X(k-1) = \prod_{j=1}^{n-1}\left(1-q^{n-j}\,q^k\right), \tag{7.61}$$

wobei für $X(k)$ aufgrund von Lemma (3.13) gilt:

$$\operatorname{ldeg}(X(k))\in\{0,n\} \qquad\text{und}\qquad \deg(X(k))\in\{n-1,n\}.$$

D. h. die einfachste Möglichkeit wäre $X(k) = c\left(q^k\right)^n$. Da dann aber die linke Seite von Gleichung (7.61) identisch Null ist, muß zumindest der untere Grad von $X(k)$ gleich 0 sein. Insofern bleibt ein Gleichungssystem mit mindestens n Variablen zu lösen – ein deutlich höherer Rechenaufwand als im parametrischen Fall, wo lediglich ein Gleichungssystem mit einer Unbekannten zu lösen ist.[47] ◇

[47] Wobei Algorithmus 7.1 diesen Rechenaufwand deutlich reduziert.

8 Zusammenfassung

In den vorigen Kapiteln haben wir im wesentlichen drei wichtige Algorithmen zur Behandlung **q**-hypergeometrischer Terme kennengelernt.

q-Gosper-Algorithmus: Dieser *konstruiert* zu einer endlichen Summe **q**-hypergeometrischer Terme $F(k) = \sum_{j=1}^{r} F_j(k)$ eine endliche Summe **q**-hypergeometrische Terme $G_0(k), \ldots, G_s(k)$, $s \in \mathbb{N}$, so daß

$$F(k) = \sum_{j=0}^{s} G_j(k+1) - \sum_{j=0}^{s} G_j(k),$$

sofern eine solche Linearkombination existiert.

q-Zeilberger-Algorithmus: Ist die Summe $S(n)$ mit

$$S(n) = \sum_{j=a}^{b} F(n,k), \qquad F(n,k) \text{ } q\text{-hypergeometrisch bzgl. } n \text{ und } k \tag{8.1}$$

gegeben, so versucht der Algorithmus eine Rekursionsgleichung der Form

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, S(n-j) = B(n), \qquad \sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}\big(q^n\big) \text{ und } \frac{B(n)}{F(n,k)} \in \mathbb{F}\big(q^n, q^k\big)$$

für $S(n)$ zu bestimmen.

q-Petkovšek-Algorithmus: Für (inhomogene[48]) Rekursionsgleichungen

$$\sum_{j=0}^{J} \sigma_j(n)\, S(n+j) = B(n), \qquad \sigma_0(n), \ldots, \sigma_J(n) \in \mathbb{F}[{q_1}^n, \ldots, {q_m}^n]$$

findet der Algorithmus *alle* bzgl. n **q**-hypergeometrischen Lösungen $S(n)$. Darüberhinaus können sogar alle $S(n) \in \mathbb{F}[[q^n]]$, die die Rekursionsgleichung erfüllen, bestimmt werden.

Das bei allen drei Algorithmen auftauchende Teilproblem der Bestimmung endlicher Polynomlösungen von Rekursionsgleichungen wird oft gegenüber dem Standardlösungsverfahren[49] effizienter durch den im Abschnitt 7.1.1 vorgestellten Algorithmus 7.1 gelöst.

Insgesamt bieten die Algorithmen ein wirkungsvolles Werkzeug zum Beweisen oder gar Herleiten von **q**-hypergeometrischen Summationsidentitäten. Allein durch die Übertragung von bekannten hypergeometrischer Ergebnissen bzw. Algorithmen auf den q-Fall ließe sich deren Möglichkeiten noch weiter steigern. Insbesondere folgende noch offenen Probleme bzw. Fragestellungen sind dabei interessant:

[48] Die Inhomogenität muß **q**-hypergeometrisch bzgl. der Rekursionsvariable sein.

[49] Dieses ermittelt eine Gradschranke für das Polynom und wandelt die Rekursionsgleichung durch Einsetzen eines generischen Polynomes mittels Koeffizientenvergleich in ein lineares Gleichungssystem für die Polynomkoeffizienten um.
In allen bisher vorhandenen Implementierungen wurde meines Wissens stets dieses Verfahren angewandt.

- Meines Wissens ist bisher noch ungeklärt, ob der q-Zeilberger-Algorithmus ein *Entscheidungsalgorithmus* im folgenden Sinne ist: Findet der Algorithmus genau dann eine Rekursion für die Summe $S(n)$ aus (8.1), falls eine solche[50] existiert?

  Bisher wissen wir nur, daß die Rekursionsordnung nicht notwendigerweise minimal ist.

- In [Koe98] erweitert der Autor den Gosper- und Zeilberger-Algorithmus auf (m, l)-fache hypergeometrische Terme $F(n, k)$, wobei hier $F(n + m, k)/F(n, k)$ und $F(n, k + l)/F(n, k)$ aus $\mathbb{K}[n, k]$ sind. Diese Verallgemeinerung ließe sich auch auf den q-Fall übertragen.

- Viele Identitäten enthalten Mehrfachsummen. In [WZ92] behandeln die Autoren sowohl den hypergeometrischen als auch den q-hypergeometrischen Fall, wobei allerdings die Beschreibung eines effizienten Algorithmus' fehlt. K. Wegschaider gibt in [Weg97] für den hypergeometrischen Fall verschiedene Algorithmen an; entsprechende Versionen für den q-Fall scheinen bisher noch nicht zu existieren.

- Gilt $S(n) = 1$ für die Summe aus (8.1), so beweist L. Yen in [Yen96] folgende Tatsache:

  > Für eine bestimmte Klasse von q-hypergeometrischen Termen gibt es immer ein $N \in \mathbb{N}$, so daß aus $1 = S(0) = S(1) = \cdots = S(N)$ sogar $S(n) \equiv 1$ folgt.

  In ihrer Arbeit gibt sie eine konkrete Formel für dieses N. Z. B. für die q-Variante der Chu-Vandermonde-Identität,

  $$\sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 2\,n \\ n \end{bmatrix}_q,$$

  erhält sie $N = 2358$.[51] Gilt diese Formel also für alle $n \in \{0, \ldots, 2358\}$, so ist sie für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ gültig. Offenbar ist die Schranke für N noch zu schlecht, so daß der Ansatz bisher nur aus *theoretischer* Sicht interessant erscheint. Insofern bleibt also zu fragen, ob sich diese Schranke noch verbessern ließe.

[50] Die Rekursion sollte Koeffizienten in $\mathbb{F}(q^n)$ besitzen und die Inhomogenität ein q-hypergeometrischer Term bzgl. n sein.

[51] Da die rechte Seite stets ungleich Null ist, kann man offenbar durch $\begin{bmatrix} 2\,n \\ n \end{bmatrix}_q$ teilen und somit auf die gewünschte Form bringen.

Literatur

[ABP95] S. A. Abramov, M. Bronstein, and M. Petkovšek. On polynomial solutions of linear operator equations. In T. Levelt, editor, *Proc. ISSAC '95*, pages 290–296. ACM Press, New York, 1995.

[Abr] S. A. Abramov. Denominators of rational solutions of linear difference equations. *Programmirovanie*, 1:49–52. Errata, Programmirovanie, **4**, p. 96.

[Abr95] S. A. Abramov. Rational solutions of linear difference and q-difference equations. *Programming and Comput. Software*, 6:273–278, 1995. Transl. from Programmirovanie (1995) 6, 3-11.

[Aig93] M. Aigner. *Diskrete Mathematik*. Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, 1993.

[And86] G. E. Andrews. q-series: Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra. CBMS Reginonal Conference Lecture Series 66, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1986.

[APP98] S. A. Abramov, P. Paule, and M. Petkovšek. q-hypergeometric solutions of q-difference equations. *Discrete Math.*, 180:3–22, 1998.

[GCL92] K. O. Geddes, S. R. Czapor, and G. Labahn. *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer Academic Publ., 1992.

[GKP94] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, second edition, 1994.

[Gos78] R. W. Gosper. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 75:40–42, 1978.

[GR90] G. Gasper and M. Rahman. *Basic Hypergeometric Series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1990.

[Hei47] E. Heine. Untersuchungen über die Reihe... *J. reine angewandte Math.*, 34:285–328, 1847.

[Jac10] F. H. Jackson. Transformations of q-series. *Messenger of Math.*, 39:145–153, 1910.

[Koe95] W. Koepf. Algorithms for m-fold hypergeometric summation. *J. Symbolic Computation*, 20:399–417, 1995.

[Koe96] W. Koepf. Summation in Maple. *Maple Technical Newsletter*, 3(2):26–32, 1996.

[Koe98] W. Koepf. *Hypergeometric Summation*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998.

[Koo93] T. H. Koornwinder. On Zeilberger's algorithm and its q-analogue: a rigorous description. *J. of Comput. and Appl. Math*, 48:93–111, 1993.

[KS94] R. Koekoek and R. F. Swarttouw. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q analogue. Technical Report 94–05, Technische Universiteit Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, 1994. Electronic version available at `http://www.can.nl/~renes`.

[Pau94] P. Paule. Short and easy computer proofs of the Rogers-Ramanujan Identities and of identities of similar type. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 1:1–9, 1994.

[Pau95] P. Paule. Greatest factorial factorization and symbolic summation. *J. Symbolic Computation*, 20:235–268, 1995.

[PR95] P. Paule and A. Riese. A Mathematica q-analogue of Zeilberger's algorithm based on an algebraically motivated approach to q-hypergeometric telescoping. In *Fields Proceedings of the Workshop on 'Special Functions, q-Series and Related Topics'*, Toronto, Ontario, 12-23 June 1995. Fields Institute for Research in Mathematical Sciences at University College.

[PWZ96] M. Petkovšek, H. S. Wilf, and D. Zeilberger. *A=B*. A K Peters, 1996.

[Rie95] A. Riese. A Mathematica q-analogue of Zeilberger's algorithm for proving q-hypergeometric identities. Master's thesis, Research Institute for Symbolic Computation, J. Kepler University, Linz, Austria, 1995.

[Rie96] A. Riese. A generalization of Gosper's algorithm to bibasic hypergeometric summation. *Electr. Journal of Combinatorics*, 3:1996, 1996.

[Rie97] A. Riese. *Contributions to Symbolic* **q**-*Hypergeometric Summation.* PhD thesis, Research Institute for Symbolic Computation, J. Kepler University, Linz, Austria, 1997.

[Weg97] K. Wegschaider. Computer generated proofs of binomial multi-sum identities. Master's thesis, Research Institute for Symbolic Computation, J. Kepler University, Linz, Austria, 1997.

[WZ92] H. S. Wilf and D. Zeilberger. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and 'q') multisum/integral identities. *Inventiones mathematicae*, 108:575–633, 1992.

[Yen96] L. Yen. A tow-line algorithm for proving q-hypergeometric identities. *Journal of Math. Analysis and Applications*, 213:1–14, 1996.

Index